Seminář 2.

Pravidlo η Pro libovolný λ-term F a proměnnou x, která se nevyskytuje volně v λ-termu F odvoď rovnost

$$(\lambda x.\, Fx) = F$$

Dá se ukázat, že pravidlo η je bezesporné s axiomy λ-kalkulu, který budeme označovat zkratkou $\lambda\beta$. Kalkul, který vznikne přidáním pravidla η označujeme jako $\lambda\beta\eta$.

Pravidlo η se často nazývá pravidlem extensionality protože pro libovolné dva λ-termy F, G a proměnnou x, která se nevyskytuje volně v F ani v G z rovnice

$$Fx = Gx \tag{1}$$

dovoluje odvodit rovnici

$$F = G \tag{2}$$

Díváme-li se na termy F a G jako na funkce jedné proměnné, rovnice (1) je vyjádřením faktu, že tyto funkce mají sobě rovné všechny hodnoty. Pravidlem **η** lze odvodit rovnost (2) funkcí F a G .
Extenzionalita funkcí pak jen vyjadřuje fakt, že funkce, které mají stejné všechny hodnoty se sobě rovnají.

2.1 V kalkulu **λβη** odvoďte z rovnice (1) rovnici (2).

2.2 V kalkulu **λβ** najděte dvojice termů, které ukazují, že inkluze definované na množině Λ pomocí relací $\to_\beta$, $\twoheadrightarrow_\beta$, $=_\beta$ jsou ostré

$$\to_\beta \;\subset\; \twoheadrightarrow_\beta \;\subset\; =_\beta$$

Definice. Říkáme, že
(i) term **t** je v β-normálním tvaru, jestliže neobsahuje žádný redex, tedy že na něj nelze aplikovat β-pravidlo,
(ii) term **t** má β-normální tvar, jestliže **t** = **s** pro nějaký term v β-normálním tvaru,
(iii) term **t** je normalizovatelný, jestliže má nějaký normální tvar,
(iv) term **t** je silně normalizovatelný, jestliže libovolná strategie redukcí jeho redexů vede k jeho normálnímu tvaru.

2.4 Ověřte zda následující termy mají β-normální tvar

(i) $(\lambda yx.zy)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))(\lambda wx.x)$

(ii) $(\lambda y.yyy)((\lambda ab.a)(\lambda x.x)(SS)$

2.6 Najděte λ-termy, které jsou

(i) v β-normálním tvaru,
(ii) silně normalizovatelné, ale ne v β-normálním tvaru,
(iii) normalizovatelné, ale ne silně normalizovatelné,
(iv) nejsou normalizovatelné

2.7 Dokažte *Substituční lemma* pro β-redukce: pro libovolné termy **t, s** a **u,** a libovolnou proměnnou x platí: je-li **t** $\twoheadrightarrow_\beta$ **s** potom **t**[x:=**u**] $\twoheadrightarrow_\beta$ **s**[x:=**u**] .