Modely
Herbrandovské interpretace

Petr Štěpánek

S využitím materialu Krysztofa R. Apta

2006

Uvedli jsme termové interpretace a termové modely pro logické programy a také nejmenší termový model $C(P)$ pro daný program P.

Nyní se budeme zabývat jinými (a častěji studovanými) interpretacemi, které se nazývají Herbrandovské.

Nejprve se budeme zabývat algebrami, které dávají termům jejich sémantický význam. Potom rozšíříme algebry do interpretací, které dovolují přiřadit sémantický význam programům, rezultantám a dotazům.

Ke konstrukci speciálních interpretací a modelů se používají operátory na úplných, částečně uspořádaných strukturách. Proto je užitečné zabývat se operátory a jejich pevnými body v obecném smyslu.

Předpokládejme, že $(\mathbf{A}, \leq)$ je částečně uspořádaná množina. Připomeneme některé definice.

Je-li $a \in \mathbf{A}$ a $X \subseteq \mathbf{A}$, říkáme, že a je nejmenší prvek X, jestliže $a \in X$ a pro každý prvek $x \in X$ platí $a \leq x$.

Říkáme, že a je supremem množiny X, jestliže $a \in X$ pro každé $x \in X$ platí $x \leq a$ a a je nejmenší prvek s touto vlastností.

V obecném případě nemusí existovat ani nejmenší prvek množiny X ani její supremum. Z antisymetrie částečného uspořádání však plyne, že pokud nejmenší prvek a supremum X existuje, je určen jednoznačně.

Částečně uspořádaná množina $(\mathbf{A}, \leq)$ je *úplná* jestliže obsahuje nejmenší prvek a pro každou neklesající posloupnost

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

prvků z $\mathbf{A}$ existuje její supremum.

V dalším budeme uvažovat jen úplné částečně uspořádané množiny $\mathbf{A}$, které jsou nějakou podmnožinou nějaké specifické domény.

Nejmenší prvek $\mathbf{A}$ bude prázdná množina $\emptyset$, relace $\leq$ bude definována jako inkluze $\subseteq$ a supremum $X \subseteq \mathbf{A}$ bude totožné se sjednocením $\cup X$.

Uvažujme nyní nějakou pevně zvolenou úplnou částečně uspořádanou množinu $\mathbf{A}$, její prvky budeme značit $I, J \dots$ Zobrazení množiny $\mathbf{A}$ do $\mathbf{A}$ budeme nazývat operátory na množině $\mathbf{A}$.

Je-li

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots \qquad (1)$$

neklesající posloupnost prvků z $\mathbf{A}$ supremum $\cup\{ I_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ existuje.

Říkáme, že operátor T je monotonní, jestliže

$$I \subseteq J \text{ implikuje } T(I) \subseteq T(J),$$

T je finitární, jestliže pro libovolnou neklesající posloupnost (1) platí

$$T(\cup\{ I_n \mid n \in \mathrm{N}\}) \subseteq \cup\{ T(I_n) \mid n \in \mathrm{N}\}.$$

Je-li T současně monotonní a finitární, říkáme, že je spojité. Snadno se nahlédne, že v takovém případě pro každou posloupnost (1) platí

$$T(\cup\{ I_n \mid n \in \mathrm{N}\}) = \cup\{ T(I_n) \mid n \in \mathrm{N}\}.$$

Tato rovnost se častěji používá jako definice spojitého operátoru.

Říkáme, že I je prefixním bodem operátoru T, je-li $T(I) \subseteq I$.

I je pevným (fixním) bodem operátoru T, je-li $T(I) = I$.

ž

K výpočtu nejmenšího pevného bodu operátoru T se používají jeho iterace (mocniny) .

Pro libovolný operátor T na $\mathbf{A}$, libovolný prvek I z $\mathbf{A}$ a přirozené číslo n definujeme

$$\begin{aligned} T\uparrow 0(I) &= I \\ T\uparrow(n+1)(I) &= T(T\uparrow(n)(I)) \\ T\uparrow\omega(I) &= \cup\{ T\uparrow(n)(I) \mid n \in \mathrm{N}\}. \end{aligned}$$

Nejužitečnější jsou iterace, kde $I = \emptyset$, které použijeme k výpočtu nejmenšího pevného bodu. Pro jednoduchost je budeme značit

$$T\uparrow\alpha(\emptyset) \text{ krátce jako } T\uparrow\alpha$$

pro každé přiřirozené číslo α a pro ω.

Volně řečeno $T\uparrow(n)(I)$ je n-tá iterace T počínající prvkem I, tedy $T\uparrow n$ je n-tá iterace T počínající nejmenším prvkem $\emptyset$.

Z definice úplné částečně uspořádáné množiny pak plyne, že pokud je posloupnost $T\uparrow(n)(I)$ monotonní pro $n \geq 0$, potom $T\uparrow\omega$ existuje. (To není ve všech případech zaručeno.)

Příklad. Nejjednodušší úplnou uspořádanou množinu získáme z množiny přiroznených čísel N, ke které přidáme jako největší prvek ω .

Operátor T definovaný předpisem

$T(n) = n+1$ pro přirozené n a
$T(\omega) = \omega$

je monotonní protože pro $m, n \in N$, $m \leq n$ platí $T(m) \leq T(n)$ a $n \leq \omega$ implikuje $n+1 \leq \omega$.

Operátor T je také spojitý, protože každá neklesající posloupnost přirozených čísel

$$n_0 \subseteq n_1 \subseteq n_2 \subseteq \dots n_j \subseteq n_{j+1} \subseteq \dots \qquad (2)$$

je buď omezená přirozeným číslem a má největší prvek n_j , odkud

$$\cup\{n_i \mid i \in \mathrm{N}\} = n_j \qquad \text{a}$$

$$\cup\{T(n_i) \mid i \in \mathrm{N}\} = n_{j+1} = T(n_j) = T(\cup\{n_i \mid i \in \mathrm{N}\})$$

nebo posloupnost (2) není omezená přirozeným číslem a potom

$$\cup\{n_i \mid i \in \mathrm{N}\} = \omega \qquad \text{odkud}$$

$$\cup\{T(n_i) \mid i \in \mathrm{N}\} = \omega = T(\omega) = T(\cup\{n_i \mid i \in \mathrm{N}\})$$

Věta o pevném bodu (Knaster, Tarski)

Je-li T spojitý operátor na úplné částečně uspořádané množině, potom $T \uparrow \omega$ existuje a je nejmenším prefixním bodem a nejmenším pevným (fixním) bodem T.

Důkaz.

Existence $T \uparrow \omega$ bude zaručena z úplnosti uspořádání, pokud ukážeme, že posloupnost prvků $T \uparrow n$ je neklesající. Postupujeme indukcí: $T \uparrow 0 = \varnothing \subseteq T \uparrow 1$ a $T \uparrow n \subseteq T \uparrow (n+1)$ plyne z monotonnosti T.

Navíc $T \uparrow \omega$ je pevný bod T protože z monotonnosti $T \uparrow n$ a spojitosti T dostáváme

$$T(T \uparrow \omega) = T(\cup\{T \uparrow n_i \mid i \in \mathrm{N}\}) = \cup\{T(T \uparrow n_i) \mid i \in \mathrm{N}\}) \text{ tedy}$$

$$T(T \uparrow \omega) = \cup\{T(n_i) \mid 1 < i \in \mathrm{N}\}) = \cup\{T(n_i)) \mid i \in \mathrm{N}\}) = T \uparrow \omega .$$

To znamená, že $T \uparrow \omega$ je také prefixní bod.

Abychom dokázali, že $T \uparrow \omega$ je nejmenší prefixní bod, předpokládejme, že J je libovolný prefixní bod.

Indukcí podle n dokážeme, že pro každé $n \geq 0$ je $T \uparrow n \subseteq J$.
Pro $n = 0$ je $T \uparrow 0 = \varnothing \subseteq J$ a pro $n > 0$, je-li $T \uparrow n \subseteq J$, potom z monotonnosti plyne $T \uparrow (n+1) = T(T \uparrow (n+1)) \subseteq \mathrm{T(J)} = J$.

Tedy $T \uparrow \omega$ je prefixní bod a také pevný bod T.

Herbrandovské interpretace

jsou přijatelnější alternativou k obecným termovým interpretacím, jsou to také termové interpretace založené na termových algebrách, ale na algebrách sestávajících z uzavřených termů. Mají podobné vlastnosti jako obecné termové interpretace, ale jejich analýza pro specifické modely je jednodušší.

Předpokládejme, že množina konstant jazyka L je neprázdná. *Herbrandovým univerzem* HU_L pro jazyk L nazveme množinu všech základních termů jazyka L.

Množinu HB_L všech základních atomických formulí jazyka L nazveme *Herbrandovou bází.*

Herbrandova algebra pro L je definována následovně:

• univerzem algebry je Herbrandovo univerzum HU_L, připomeňme, že v této množině nejsou žádné proměnné a tedy sestává jen ze složených základních termů.

• Jejich interpretace je dána kanonickým způsobem . Je-li f n-ární funkční symbol L, jeho interpretace je dána zobrazením , které libovolné n - tici základních termů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ přiřazuje základní term

.
$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) .$$

• Herbrandova algebra je tímto způsobem jednoznačně určena.

Říkáme, že I je Herbrandova interpretace pro jazyk L, jestliže je to interpretace nad Herbrandovou bází a

• každému n - árnímu predikátovému symbolu p přiřazuje množinu p_I n - tic základních termů.

Existuje tedy jedna Herbrandova algebra, ale nad ní mohou být různé Herbrandovy interpretace.

Mezi Herbrandovými interpretacemi a podmnožinami Herbrandovy báze je přirozená, jednoznačná korespondence.

Pro každý predikátový symbol p definujeme množinu

$$\{p\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid p \text{ je } n\text{-ární predikát a } (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in p_I\}$$

interpretaci I ztotožníme se sjednocením všech takových množin.

Potom Herbrandovy interpretace pro L, jsou totožné s podmnožinami Herbrandovy báze HB_L. Jednou z interpretací je také prázdná podmnožina.

Povšimněme si některých specifických vlastností Herbrandových interpretací.

Pro každé ohodnocení proměnných σ a konečnou množinu proměnných X je $\sigma| X$ substituce.

Lemma. (Herbrandova interpretace)

Je-li I Herbrandova interpretace, potom platí

(i) pro libovolný atom A a ohodnocení proměnných σ

$I \models_\sigma A$, právě když $A(\sigma \mid Var(A)) \in I$

(ii) pro libovolný atom A

$I \models A$, právě když $ground(A) \subseteq I$

(iii) pro libovolnou klauzuli c

$I \models c$ právě když pro všechny instance $A \leftarrow B_1, B_2, \dots, B_n$ z $ground(c)$ $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subseteq I$ implikuje $A \in I$.

Důkaz. (i) Indukcí podle složitosti libovolného termu t a konečné množiny proměnných X, $Var(t) \subseteq X$ se ukáže, $\sigma(t) = t(\sigma|X)$.

Tedy hodnota přiřazená termu t ohodnocením proměnných σ je výsledkem použití substituce $\sigma|X$ na t .

Pro atom $A = p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ dostáváme

$I \models_\sigma p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ právě když $(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_n\theta) \in p_I$

právě když $A\theta \in I$,

kde $\theta = \sigma |Var(p(t_1, t_2, \dots, t_n))$. Tvrzení (i) je dokázáno.

(ii) plyne z (i)

(iii) podle (i)

$I \models_\sigma A \text{ <- } B_1, B_2, \dots, B_n$ právě když $\{B_1\theta, \dots, B_n\theta\}$ implikuje $A\theta \in I$

kde $\theta = \sigma \mid Var(A \text{ <- } B_1, B_2, \dots, B_n)$. Odtud plyne (iii).

Speciálně pro základní atom A dostáváme

$$I \models A \quad \text{právě když} \quad A \in I .$$

Herbrandovu interpretaci tedy můžeme ztotožnit s množinou všech základních atomů, které jsou v ní pravdivé.

Příklad. (suma numerálů)

$$I = \{ sum(s^m(0), s^n(0), s^{n+m}(0)) \mid m, n \geq 0 \}$$

je Herbrandova interpretace pro program *SUMA*.

Navíc I je model programu *SUMA* protože pro libovolné $m, n \geq 0$ platí

$$sum(s^m(0), 0, s^m(0)) \in I \qquad \text{a}$$

$$sum(s^m(0), s^n(0), s^{n+m}(0)) \in I \ \text{ implikuje } \ sum(s^m(0), s^{n+1}(0), s^{n+m+1}(0)) \in I$$

I je tedy model programu *SUMA* podle (iii) z předchozího lemmatu.

Poznámka. (Základní implikační stromy)

(i) *Základní implikační strom* vzhledem k programu P , je konečný strom, jehož uzly jsou základní atomy. Pro každý uzel A a jeho bezprostřední následníky $B_1, \dots, B_n$ patří klauzule $A \leftarrow B_1, \dots, B_n$ do $ground(P)$.

(ii) Říkáme, že atom A *má základní implikační strom* vzhledem k P , je-li A kořenem nějakého základního implikačního stromu vzhledem k P .

Definice. (Herbrandova interpretace $M(P)$)

$M(P)$ je Herbrandova interpretace pro program P definovaná následovně:

$$M(P) = \{ A \mid \text{atom } A \text{ má základní implikační strom pro } P \}$$

Lemma.
$M(P)$ je Herbrandův model programu P.

Důkaz. Je-li atom A prvkem $M(P)$, podle předpokladu má základní implikační strom, tedy v *ground* (P) existuje klauzule

$$A \text{ <- } B_1, B_2, \dots, B_n, \; n \geq 0 \qquad (3)$$

Stačí ukázat, že klauzule (3) je pravdivá v interpretaci $M(P)$. Podle (iii) z lemmatu o Herbrandovských interpretacích to platí, jestliže

$$\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subseteq M(P) \quad \text{implikuje} \quad A \in M(P),$$

a to je v základním implikačním stromu zaručeno.

Věta. (Nejmenší Herbrandův model)
$M(P)$ je nejmenší Herbrandův model programu P.

Důkaz. Nechť I je Herbrandův model P. Potom I je také model *ground* (P). Dokážeme, že

$$A \in M(P) \text{ implikuje } I \models A$$

indukcí podle počtu uzlů v daném implikačním stromě pro A vzhledem k P.

Základ indukce: $i = 1$, potom jednotková klauzule A <- je prvkem ground (P), tedy $I \models A$.

Indukční krok: předpokládejme, že A je kořenem implikačního stromu pro P s $i > 1$ uzly a že tvrzení již platí pro implikační stromy s menším počtem uzlů. Potom A musí být hlavou nějaké klauzule

$$A \text{ <- } B_1, B_2, \dots, B_n, \; n \geq 1 \;\text{ z }\; ground(P).$$

Přitom každý atom B_j $1 \le j \le n$ má implikační strom s $k_j < n$ uzly. Podle indukčního předpokladu $I \models B_j$ pro všechny atomy B_j. Ale $I \models A \text{ <- } B_1, B_2, \dots, B_n$, tedy $I \models A$.

$M(P)$ je pro základní atomy sémanticky ekvivalentní s deklarativní interpretací programu P. Jinými slovy, pravdivost základního atomu A ve všech modelech programu P stačí testovat v jediném modelu $M(P)$.

Věta. (Základní ekvivalence)
Pro libovolný základní atom A a program P platí

$$P \models A \quad \text{právě když} \quad M(P) \models A.$$

Nejprve pozorování. Je-li základní atom A pravdivý ve všech Herbrandových modelech programu P, potom je pravdivý ve všech modelech P.

Důkaz pozorování. Mějme I libovolný model programu P. Pro libovolnou klauzuli $A \text{ <- } B_1, B_2, \dots, B_n$ z *ground*(P) platí

$$\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subseteq I \ \text{ implikuje } \ A \in I \tag{4}$$

Je to důsledek tvrzení (iii) lemmatu o Herbrandovských interpretacích.

Sestrojme Herbrandovskou interpretaci I_H, která je otiskem modelu I do Herbrandovy báze

$$I_H = \{C \mid C \text{ je základní atom a } I \models C\}$$

Podle (4) a tvrzení (iii) citovaného lemmatu, je I_H také modelem P. Podle tvrzení (ii) téhož lemmatu jsou stejné základní atomy pravdivé v I a I_H. Tím je pozorování dokázáno.

Důkaz věty. Mějme libovolný základní atom A. Víme, že $M(P)$ je model programu P, je-li $P \models A$, potom také $M(P) \models A$.
K důkazu opačné implikace použijeme fakt, $M(P)$ je Herbrandovská

interpretace. Podle tvrzení (ii) pro Herbrandovské interpretace a speciálně pro model $M(P)$ platí

$$M(P) \models A \quad \text{právě když} \quad A \in M(P) .$$

Podle věty o nejmenším Herbrandově modelu pak $A \in M(P)$ implikuje, že A je pravdivý ve všech Herbrandových modelech. Podle pozorování je atom A pravdivý ve všech modelech programu P, tedy $P \models A$.

Operátor bezprostředního důsledku. Nejmenší Herbrandův model má významné postavení mezi všemi modelydaného programu P . Ukážeme, že je nejmenším prefixním bodem operátoru T_P , který zobrazuje Herbrandovy interpretace P na Herbrandovy interpretace P .

Definice. (T_P - operátor bezprostředního důsledku)

Mějme libovolný program P . *Operátor bezprostředního důsledku* pro P definujeme následovně:
Pro libovolnou Herbrandovskou interpretaci I

$$T_P(I) = \{ A \mid \exists \mathbf{B} \, (A \text{ <- } \mathbf{B} \in ground(P) , \ I \models \mathbf{B} \}$$

Operátor T_P přiřazuje Herbrandovským interpretacím Herbrandovské interpretace. Speciálně, je-li A <- jednotková klauzule z P , potom každá základní instance A je prvkem $T_P(I)$ pro každé I .

Lemma. (Charakterizace T_P)

Mějme libovolný program P a Herbrandovskou interpretaci I , platí

$$I \models P \quad \text{právě když} \quad T_P(I) \subseteq I .$$

Důkaz.

$I \models P$

$\Leftrightarrow$ {(iii) lemma pro Herbrandovské interpretace}

pro každou klauzuli $A \leftarrow \mathbf{B} \in ground(P)$, $I \models \mathbf{B}$ implikuje $A \in I$

$\Leftrightarrow T_P(I) \subseteq I$ {definice T_P}

Studium Herbrandovských modelů programu P je tedy ekvivalentní se studiem prefixních bodů operátorů T_P. Ukážeme, že se T_P pro tento účel hodí.

Lemma. (spojitost T_P)

(i) T_P je monotonní ,
(ii) T_P je finitární .

Důkaz. (i) plyne z definice operátoru,

(ii) mějme nekonečnou posloupnost $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots$ Herbrandových interpretací. Předpokládejme, že

$$A \in T_P(\cup\{ I_n \mid n \in \mathrm{N}\}),$$

potom pro nějaké $\mathbf{B}$ je klauzule $A \leftarrow \mathbf{B} \in ground(P)$ a

$$\cup\{ I_n \mid n \in \mathrm{N}\}) \models \mathbf{B}.$$

Protože $\mathbf{B}$ je konečná množina základních atomů pro nějaké n platí $\mathbf{B} \subseteq I_{\mathrm{n}}$, a $I_n \models \mathbf{B}$. Tedy $A \in T_P(I_n)$.

Věta . (Charakterizace $M(P)$)

Herbrandova interpretace $M(P)$ má následující vlastnosti:

(i) $M(P)$ je nejmenší Herbrandův model P,
(ii) $M(P)$ je nejmenší prefixní bod T_P ,
(iii) $M(P)$ je nejmenší pevný bod T_P ,
(iv) $M(P) = T_P\!\uparrow\!\omega$,
(v) $M(P) = \{ A \mid A$ je základní atom , $P \models A \}$.

Důkaz. (i) je Věta o nejmenším Herbrandové modelu.
(i) $\Rightarrow$ (ii) plyne z (i) a Charakterizace T_P,
(ii) $\Rightarrow$ (iv) plyne z (ii) a spojitosti T_P,
(iv) $\Rightarrow$ (iii) plyne z Věty o pevném bodě.
(v) plyne z Věty o základní ekvivalenci .

Příklad výpočtu $M(P)$. Abychom se rychle dopočítali, vezmeme nejjednodušší program *SUMMER* . Ukážeme, že

$$I = \{\texttt{summer,warm,happy}\}$$

je nejmenší Herbrandův model.

$T_{SUMMER} \uparrow 0 = \emptyset$,
$T_{SUMMER} \uparrow 1 = \{\texttt{summer}\}$,
$T_{SUMMER} \uparrow 2 = \{\texttt{summer,warm}\}$,
$T_{SUMMER} \uparrow 3 = \{\texttt{summer,warm,happy}\}$,
$T_{SUMMER} \uparrow 4 = \{\texttt{summer,warm,happy}\}$.

Odtud $T_{SUMMER} \uparrow 4 = T_{SUMMER} \uparrow \omega$, a z tvrzení (iv) Věty o charakterizaci $M(P)$, I je opravdu nejmenší Herbrandův model programu *SUMMER* .
Stejným způsobem , ale pracněji se vypočítá nejmenší Herbrandův model programu *SUMA* .

Tvrzení (v) Věty o charakterizaci $M(P)$ dává popis sémantická relace důsledku $P \models A$ pomocí základních implikačních stromů. Jinou charakterizaci modelu $M(P)$ získáme pomocí procedurální interpretace logických programů.

Definice. (Množina úspěšných atomů)

Množina úspěšných atomů programu P sestává ze všech základních atomů, pro které má $P \cup \{A\}$ úspěšnou SLD-derivaci.

Věta. (Úspěch)

Pro libovolný program P a základní atom A jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(i) $M(P) \models A$,
(ii) $P \models A$,
(iii) každý SLD-strom pro $P \cup \{A\}$ je úspěšný,
(iv) A je prvkem množiny úspěšných atomů P .

Důkaz.
(i) $\Rightarrow$ (ii) plyne z Věty o základní ekvivalenci,
(ii) $\Rightarrow$ (iii) plyne ze silné Věty o úplnosti ,
(iii) $\Rightarrow$ (iv) tvrzení (iv) plyne z (iii) ,
(iv) $\Rightarrow$ (i) plyne z Věty o korektnosti a z faktu, že $M(P)$ je model P .