Logické programy
Deklarativní interpretace

Petr Štěpánek

S využitím materialu Krysztofa R. Apta

2006

Algebry. (Interpretace termů)

Algebra J pro jazyk termů L obsahuje

- Neprázdnou množinu D, která se nazývá *doména.* ,
- Pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L zobrazení $f_J : D^n \rightarrow D$.

Ohodnocení proměnných σ je zobrazení, které každé proměnné x přiřazuje hodnotu $\sigma(x)$ z domény D.

Interpretaci (*hodnoty*) *termů* při ohodnocení proměnných σ definujeme obvyklým způsobem..

Říkáme, že term t je *základní* (*ground*) , jestliže neobsahuje proměnné.

• je-li term t proměnná x, jeho hodnota je $\sigma(x)\ \varepsilon\ D$,

• je-li t složený term $f(t_1, \dots, t_n)$ jeho hodnota $\sigma(t)$ je . $f_J(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))\ \varepsilon\ D$.

Pro každou konstantu c platí $\sigma(c) = c_J$. Hodnoty konstant nezáleží na ohodnocení proměnných.

To také platí pro každý základní term t jeho hodnota $\sigma(t)$ není závislá na ohodnocení proměnných σ.

Příklad. (Zamýšlené a bizarní algebry)

a) standardní model N (interpretace) přirozených čísel je algebra (struktura) $N = \langle \mathrm{N}, 0_N, +_N, \cdot_N \rangle$ s množinou přirozených čísel N jako doménou a obvyklou interpretací nuly, sčítání a násobení.

b) bizární, ale vyhovující definici algebry, je interpretace jazyka přirozených čísel

$\boldsymbol{C} = \langle \mathbf{C}, 0_c, +_c, \cdot_c \rangle$, kde doménou je množina komplexních čísel, nula je interpretována jako nula v komplexních číslech, sčítání definuje rovnost $c +_c d = c \cdot \pi\, d$ a násobení $c \cdot_c d = c + i\, d$.

Definice. (Interpretace jazyka)

Interpretace jazyka programů L obsahuje algebru J s doménou D, rozšířenou o interpretaci predikátových symbolů:

ke každému n-árnímu predikátovému symbolu p je přiřazena relace p_I, která je podmnožinou D^n.

Říkáme, že I je definována nad J, D je doménou I a z praktických důvodů pak označujeme zobrazení f_J jako f_I.

Sémantika jazyka programů se definuje obvyklým způsobem, jenom formulí je v definici méně.

Nechť L je jazyk programů. Souhrnným názvem *výraz* budeme označovat atomy, dotazy, rezultanty a klauzule definované v jazyce L.

Budeme definovat vztah *pravdivosti* (*splňování*) $I \models_\sigma E$ mezi interpretací I jazyka L, ohodnocením proměnných σ v doméně interpretace I a výrazem E. Je-li $I \models_\sigma E$ říkáme, že výraz E je pravdivý v interpretaci I při ohodnocení σ.

- je-li $p(t_1, \dots, t_n)$ atom, potom
  $I \models_\sigma p(t_1, \dots, t_n)$ jestliže $(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) \in p_I$
- je-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ dotaz
  $I \models_\sigma A_1, A_2, \dots, A_n$ jestliže $I \models_\sigma A_i$, pro všechna i, $1 \le i \le n$

- je-li $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$ rezultanta, potom
  $I \models_\sigma \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$ jestliže $I \models_\sigma \mathbf{A}$ za předpokladu $I \models_\sigma \mathbf{B}$

speciálně, je-li $H \leftarrow \mathbf{B}$ klauzule, potom
$I \models_\sigma H \leftarrow \mathbf{B}$ jestliže $I \models_\sigma H$ za předpokladu $I \models_\sigma \mathbf{B}$

a pro jednotkovou klauzuli $H \leftarrow$
$I \models_\sigma H \leftarrow$ jestliže $I \models_\sigma H$

Říkáme, že výraz E je pravdivý v interpretaci I, je-li pravdivý při všech ohodnoceních proměnných. Přitom prázdný dotaz $\square$ je pravdivý ve všech interpretacích.

Pokud výraz E není pravdivý v I, píšeme $I \not\models E$.

jestliže

Poznámka. Je-li výraz E základní (bez proměnných), pak pro každou interpretaci I a libovolná dvě ohodnocení σ, τ platí

$$I \models_\sigma E \quad \text{právě když} \quad I \models_\tau E$$

odtud plyne, že základní výraz E je pravdivý v interpretaci I, je-li pravdivý při alespoň jednom ohodnocení.

Definice. (Univerzální a existenční uzávěr)

Je-li E výraz, zavedeme pojem univerzálního uzávěru $\forall E$ a existenčního uzávěru $\exists E$, které budeme používat jen při sémantické analýze programů .

Jejich sémantiku definujeme takto

$I \models \forall E$ jestliže platí $I \models_\sigma E$ pro všechna ohodnocení σ ,

$I \models \exists E$ jestliže platí $I \models_\sigma E$ pro alespoň jedno σ .

Pro každý výraz E platí $I \models \forall E$ právě když $I \models E$

používat

Definice. (Modely)

Je-li S množina výrazů (nebo jejich uzávěrů), říkáme, že interpretace I je model S, jestliže všechny výrazy z S jsou pravdivé v I.

Speciálně, I je model programu P jestliže všechny klauzule programu P jsou pravdivé v I.

Definice. (Sémantický důsledek, sémantická ekvivalence)

Jsou-li dány dvě množiny výrazů (nebo jejich uzávěrů) S a T stejného, jazyka

(i) říkáme, že T je *sémantický důsledek* S nebo, že S *sémanticky implikuje* T a píšeme $S \models T$, jestliže každý model S je také modelem T. Pokud některá množina sestává z jediného prvku, vynecháváme závorky { } a zmíněnou množinu nahradíme tímto prvkem .

(ii) říkáme, že S a T jsou *sémanticky ekvivalentní*, jestliže současně platí $S \models T$ a $T \models S$. Jinými slovy S a T jsou sémanticky ekvivalentní, právě když mají stejné modely.

Lemma.

Jsou-li E, F výrazy, S, T, U množiny výrazů a $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ dotazy, potom platí

(i) $E \models E\theta$ pro všechny substituce θ

(ii) $E\theta \models \exists E$ pro všechny substituce θ

(iii) jsou-li E a F variantami, potom $E \models F$ a $F \models E$

(iv) $S \cup \{E\} \models E$

(v) $S \models T$ a $T \models U$ implikuje $S \models U$

(vi) je-li $E \models F$, potom $S \models E$ implikuje $S \models F$

(vii) je-li $S \models \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$, potom
$S \models \mathbf{A}, \mathbf{C} \leftarrow \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $S \models \mathbf{C}, \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{C}, \mathbf{B}$ platí pro každé $\mathbf{C}$,

(viii) je-li $S \models \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$ a $S \models \mathbf{B} \leftarrow \mathbf{C}$, potom $S \models \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{C}$.

Označení.

Je-li dán jazyk L, výraz E a množina výrazů S jazyka L,

(i) množinu všech instancí výrazu E označujeme $inst(E)$, podobně množinu instancí všech výrazů z množiny S označíme $inst(S)$,

(ii) množinu všech základních (ground) instancí výrazu E (tedy instancí, které neobsahují proměnné) označujeme $ground(E)$ a množinu všech základních instancí všech výrazů z množiny S označíme $ground(S)$.

Korektnost SLD-rezoluce.

Lemma. (Rezultanty)

(i) Nechť $Q = \theta/c \Rightarrow Q_1$ je SLD-derivační krok a r je odpovídající rezultanta. Potom

$$c \models r$$

(ii) Mějme SLD-derivaci $P \cup \{Q\}$ s posloupností $R_0, \dots, R_n, \dots$ odpovídajících rezultant. Potom pro každé $i \geq 0$ platí

$$P \models R_i$$

Důkaz. Předpokládejme, že $Q := \mathbf{A}, B, \mathbf{C}$, kde B je vybraný atom z Q. Předpokládejme, že $H \leftarrow \mathbf{B}$ je použitá vstupní klauzule. Potom

$$Q_1 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta \quad \text{a} \quad r = (\mathbf{A}, B, \mathbf{C})\theta \leftarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta$$

Nyní $c \models H\theta \leftarrow \mathbf{B}\theta$ a také $c \models B\theta \leftarrow \mathbf{B}\theta$, protože θ unifikuje H a B.

K oběma stranám druhé klauzule můžeme přidat konjunkce $\mathbf{A}\theta$ a $\mathbf{C}\theta$.

Dostáváme

$$c \models (\mathbf{A}, B, \mathbf{C})\theta \leftarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta$$

tedy $c \models r$.

(ii) Předpokládejme, že

$$Q \equiv Q_0 = \theta_1 \Rightarrow Q_1 \dots\ Q_n = \theta_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \dots$$

je uvažovaná SLD-derivace. Tvrzení dokazujeme indukcí.

Pro $i = 0$ je rezolventa R_0 tautologií, je pravdivá i bez předpokladu c. Případ $i = 1$ byl dokázán v (i) protože R_1 je rezultanta odpovídající rezolučnímu kroku $Q_0 = \theta_1 \Rightarrow Q_1$.

Indukční krok. Předpokládáme, že platí $P \models R_i$ pro rezultantu stupně i, (a rezultanty nižších stupňů). K rezultantě R_{i+1} vede $i+1$ rezoluční krok $Q_i \overset{\theta_{n+1}}{\Longrightarrow} Q_{i+1}$.

Tomuto rezolučnímu kroku je přiřazena (malá) rezultanta

$$r_i = Q_i\theta_{i+1} \leftarrow Q_{i+1} \qquad (1)$$

Přitom podle definice rezultanty stupně i platí

$$R_i = Q_0\,\theta_1 \dots \theta_i \leftarrow Q_i$$

odkud

$$R_i\,\theta_{i+1} = Q_0\,\theta_1 \dots \theta_i\theta_{i+1} \leftarrow Q_i\theta_{i+1} \qquad (2)$$

a podle definice rezultanty stupně $i+1$ je

$$R_{i+1} = Q_0\theta_1 \dots \theta_i\theta_{i+1} \leftarrow Q_{i+1} \qquad (3)$$

protože $P \models r_i$ podle (i) a z indukčního předpokladu také $P \models R_i$, je i implikace (2) sémantickým důsledkem programu P. Složením implikací (1) a (2) dostaneme rezultantu (3), pro kterou nakonec platí $P \models R_{i+1}$.

Věta. (Korektnost SLD-rezoluce)

Předpokládejme, že exisuje úspěšná SLD-derivace $P \cup \{Q\}$ s vypočtenou odpovědní substitucí θ. Potom $P \models Q\theta$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\theta_1, \dots, \theta_n$ je posloupnost použitých mgu. Podle lemmatu o rezultantách, pro poslední rezultantu dané SLD-derivace platí $P \models Q\theta_1 \dots \theta_n \leftarrow \square$. A vypočtená odpovědní substituce $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n \mid Var(Q)$, to znamená, že jsme dokázali $P \models Q\theta$.

Důsledek.

Předpokládejme, že existuje úspěšná SLD-derivace $P \cup \{Q\}$. Potom platí $P \models \exists Q$.

Úplnost SLD-rezoluce.

Definice. (Korektní instance)

Předpokládejme, že $P \models Q\theta$. Potom $\theta\,|Var(Q)$ nazýváme *korektní odpovědní substituce* pro dotaz Q a $Q\theta$ nazýváme *korektní instance*.

Korektní instance nemusí být nutně vypočtená, intuitivně spíš odpovídá "uhodnutému" řešení.

Věta. (Silná forma věty o úplnosti SLD-rezoluce)

Nechť $P \models Q\theta$. Potom pro každé výběrové pravidlo $\mathbf{R}$ existuje úspěšná SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle $\mathbf{R}$ s vypočtenou odpovědní substitucí η taková, že $Q\eta$ je obecnější než $Q\theta$.

Bez důkazu.

Silná forma věty o úplnosti SLD-rezoluce ukazuje, že nelze ztotožnit korektní a vypočtené odpovědní instance.

Příklad.

Mějme jazyk, který obsahuje (unární) predkát p a alespoň jednu konstantu a.

Je-li $P = \{p(y)\}$ program a $Q = p(x)$ dotaz, potom $\{y/a\}$ je korektní odpovědní substituce, ale $\{y/x\}$ je vypočtená odpovědní substituce.

Silná forma věty o úplnosti je důležitá, protože spolu s větou o korektnosti SLD-rezoluce ukazuje, že mezi deklarativní a procedurální interpretací logických programů existuje úzký vztah nezávisle na volbě výběrového pravidla.

Tato korespondence však není zcela dokonalá, protože vypočtené a korektní odpovědní substituce nemusí být totožné.

Něco o modelech

V deklarativních interpretacích hrají důležitou roli dva typy modelů (interpretací) termové a Herbrandovy modely.

Mějme jazyk L, množinu všech termů jazyka L nazveme *termovým univerzem* jazyka L a označíme TU_L. Protože jsme předpokládali, že L má nekonečně mnoho proměnných, je i TU_L nekonečná množina.

Množinu všech atomických formulí (atomů) jazyka L nazveme *termovou bází* jazyka L a označíme TB_L.

Definice. (Termová algebra)

Termová algebra pro jazyk L obsahuje

- doménu TU_L,
- pro každý n-ární funkční symbol f jeho kanonickou interpretaci

tedy zobrazení $(TU_L)^n$ do TU_L takové, že n-tici termů $t_1, \ldots, t_n$ přiřazuje term $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Termovou interpretací I jazyka L je každá interpretace L nad termovou algebrou L. Tedy každému n-árnímu predikátovému symbolu p je přiřazena relace $p_I \subseteq (TU_L)^n$.

Termovým modelem množiny výrazů S je termová interpretace, která je modelem S.

Poznámka. Protože interpretace funkčních symbolů je jednoznačně určena, každému jazyku L je přiřazena jediná termová algebra.

Termová interpretace jazyka L je tedy jadnoznačně určena interpretací predikátových symbolů.

To znamená, že je zde přirozený vzájemně jednozačný vztah mezi termovými interpretacemi a podmnožinami termové báze TB_L, který lze vyjádřit zobrazením, které každé termové interpretaci I přiřazuje množinu atomů

$$\{p(t_1, \dots , t_n) \mid p \text{ je n-ární predikát a } (t_1, \dots , t_n) \varepsilon\ p_I\}$$

Můžeme tedy termové interpretace pro L ztotožnit s (případně prázdnými) podmožinami termové báze TB_L. Ohodnocení proměnných σ v termovém univerzu TU_L přiřazuje každé proměnné x term z TU_L.

Je-li X konečná množina proměnných, restrikcí $\sigma \mid X$ dostáváme sub stituci.

Lemma. (Termové interpretace)

Je-li I termová interpretace, potom pro každý atom A a klauzuli c

(i) $I \models_\sigma A$ právě když $A(\sigma \mid Var(A))\ \varepsilon\ I$

(ii) $I \models A$ právě když $inst(A) \subseteq I$

(iii) $I \models c$ právě když pro všechny instance $A \leftarrow B_1, \dots , B_n\ \varepsilon\ inst(c)$
$\{B_1, \dots , B_n\} \subseteq I$ implikuje $A\ \varepsilon\ I$.

Důkaz. (i) pro libovolný term t a konečnou množinu proměnných X takovou, že $\mathrm{Var}(t) \subseteq X$, se indukcí podle složitosti termu t dokáže $\sigma(t) = t\,(\sigma \mid X)$. To znamená, že hodnota, kterou termu t přiřadí ohodnocení σ je rovna instanci, která vznikne použitím substituce $(\sigma \mid X)$ na term t.

Pro atom $A = p(t_1, \dots , t_n)$ dostáváme

$$I \models_\sigma p(t_1, \dots , t_n) \quad \text{právě když}$$
$$(t_1\theta, \dots , t_n\theta)\ \varepsilon\ p_I \quad \text{právě když}$$
$$p\,(t_1, \dots , t_n)\theta\ \varepsilon\ I$$

kde $\theta = (\sigma \mid Var(A))$.

(ii) bezprostředně vyplývá z (i).

(iii) Podle (i)

$$I \models_\sigma A \leftarrow B_1 , \dots , B_n$$

právě když $\{B_1\theta, \dots , B_n\theta\} \subseteq I$ implikuje $A\theta \in I$

kde $\theta = (\sigma \mid Var (A \leftarrow B_1 , \dots , B_n))$. Tvrzení (iii) plyne z definice pravdivosti klauzule.

Poznámka. Tvrzení (ii) z předchozího lemmatu ukazuje, že v obecném případě nemůžeme ztotožnit termovou interpretaci s množinou atomů, které jsou v ní pravdivé. K tomu je zapotřebí ještě další podmínka.

Definice. (Termové interpretace uzavřené na substituce)

Termová interpretace je *uzavřená na substituce* jestliže $A \in I$ implikuje $inst(A) \subseteq I$.

Nyní platí: je-li I termová interpretace uzavřená na substituce, potom

$$I = \{ A \mid A \text{ je atom a } I \models A\}$$

Popíšeme specifickou konstrukci termových modelů programů.

Definice. (Implikační stromy)

(i) *Implikační strom* vzhledem k programu P , je konečný strom, jehož uzly jsou atomy. Pro každý uzel A a jeho bezprostřední následníky $B_1, \dots , B_n$ patří klauzule $A \leftarrow B_1, \dots , B_n$ do $inst(P)$.

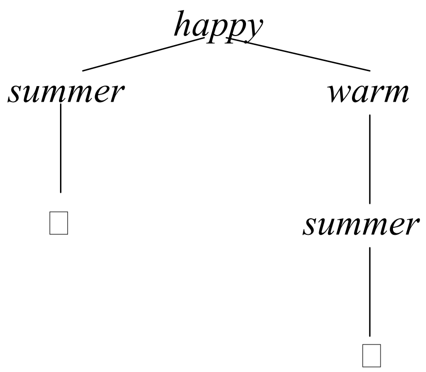
Speciálně , je-li A list implikačního stromu, jednotková klauzule $A \leftarrow$ je prvkem $inst(P)$.

(ii) Říkáme, že atom A *má implikační strom* vzhledem k P , je-li A kořenem nějakého implikačního stromu vzhledem k P . Říkáme, že *implikační strom je základní*, jestliže všechny jeho uzly jsou základní atomy.

Poznámka. Stejný atom může být kořenem několika implikačních stromů vzhledem k programu P . Je-li jednotková klauzule $A \leftarrow$ prvkem $inst(P)$, pak atom A je kořenem jednoprvkového implikačního stromu.

Příklad.

Atom *happy* má tento základní implikační strom vzhledem k programu *SUMMER* .



Lemma. (Termový model $C(P)$)

Termová interpretace

$$C(P) = \{ A \mid A \text{ má implikační strom vzhledem k } P \}$$

je modelem programu P .

Důkaz. Podle tvrzení (iii) lemmatu o termových interpretacích stačí pro každou klauzuli

$$A \leftarrow B_1, \dots , B_n \quad \text{z} \quad inst(P)$$

ukázat, že

$$\{B_1, \dots , B_n\} \subseteq C(P) \quad \text{implikuje} \quad A \;\varepsilon\; C(P) .$$

To však znamená, že A má implikační strom vzhledem k P . $C(P)$ je tedy modelem P .

Věta. (Nejmenší termový model)

$C(P)$ je nejmenší termový model programu P.

Důkaz. Nechť I je termový model P . Potom I je také model $inst(P)$. Ukážeme, že

$$A \varepsilon\ C(P) \ \text{ implikuje } \ I \models A .$$

Tvrzení věty potom plyne z (ii) v lemmatu o termových interpretacích.

Postupujeme indukcí podle počtu uzlů i v implikačním stromu atomu A vzhledem k programu P.

Pro $i = 1$ je jednotková klauzule $A \leftarrow$ prvkem $inst(P)$, tedy $I \models A$.

Indukční krok. Předpokládejme, že A je kořenem implikačního stromu vzhledem k P , který má $i > 1$ uzlů. Potom pro nějaké $n \geq 1$ atomy $B_1 , \dots , B_n$ je klauzule $A \leftarrow B_1 , \dots , B_n$, prvkem $inst(P)$ a

každé B_j, $1 \leq j \leq n$ má implikační strom vzhledem k P s $k_j < i$.

Z indukční hypotézy potom $I \models B_j$, pro každé $1 \leq j \leq n$. Ovšem

podle $I \models A \leftarrow B_1 , \dots , B_n$, tedy $I \models A$.

Věta. (Sémantická ekvivalence)

Pro libovolný atom A platí

$$P \models A \ \text{ právě když } \ C(P) \models A .$$

Poznámka. Tento výsledek ukazuje ukazuje, že model C(P) je sémanticky ekvivalentní deklarativní interpretaci programu P .
Nejprve dokažeme následující lemma.

Lemma.

Je-li atom A pravdivý ve všech termových modelech programu P , potom $P \models A$.

Důkaz. Nechť I je model P. Potom pro každou kaluzuli

$$H \leftarrow B_1 , \dots , B_n \quad \text{z} \quad inst(P) \text{ platí}$$

$$I \models B_1 , \dots , I \models B_n , \text{ implikuje } I \models H \qquad (1)$$

To proto, že I je také model inst(P), takže pro všechna ohodnocení proměnných σ platí, že $I \models_\sigma B_1 , \dots , B_n$ implikuje $I \models_\sigma H$.

Nyní nechť $I_T = \{ A \mid A$ je atom takový, že $I \models A \}$ označuje termovou interpretaci odpovídající I. Z (iii) Lemmatu o termových interpretacích a (1) dostáváme, že I_T také model (P).

Navíc, podle (ii) z Lemmatu o termových interpretacích plyne, že v obou interpretacích I a I_T jsou pravdivé stejné atomy. Odtud plyne tvrzení lemmatu.

Důkaz Věty. Zvolme pevně jeden atom A. Ukázali jsme, že $C(P)$ je model P, tedy z $P \models A$ plyne $C(P) \models A$. Opačná implikace bezprostředně

tvrzení (ii) Lemmatu o termových interpretacích, předchozího lemmatu a faktu, že $C(P)$ je nejmenší termový model P.

Mějme dvě SLD-derivace

$\xi :=\ Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots\ Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \ldots$

$\xi' :=\ Q_0' = \theta_1'/c_1 \Rightarrow Q_1' \ldots\ Q_n' = \theta_{n+1}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1}' \ldots$

Říkáme, že tyto SLD-derivace jsou *podobné* jestliže platí

$\xi :=\ Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots\ Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \ldots$

$\xi' :=\ Q_0' = \theta_1'/c_1 \Rightarrow Q_1' \ldots\ Q_n' = \theta_{n+1}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1}' \ldots$