Výběrová pravidla

Petr Štěpánek

S využitím materiálu Krysztofa R. Apta

2006

Zatím jsme ukázali, že volba přejmenování použité programové klauzule a volba nejobecnější unifikace použitá v SLD-derivačním kroku neovlivňuje výsledek výpočtu až na přejmenování proměnných. Tím jsme vyřešili problémy (C) a (D) .

Nyní se budeme věnovat vlivu volby (A), atomu v daném dotazu.

V nejobecnějším pojetí taková volba může záviset na celé "historii" derivace až k nové rezolventě.

Definice. (Výběrové pravidlo)

(i) Nechť *INIT* označuje množinu počátečních úseků SLD-derivací, jejichž poslední dotaz je neprázdný. *Výběrové pravidlo* **R** je funkce, která každému počátečnímu úseku z množiny *INIT* přiřazuje určitý výskyt nějakého atomu v jeho posledním dotazu.

(ii) Je-li dáno výběrové pravidlo **R**, říkáme, že SLD-derivace ξ sleduje výběrové pravidlo **R**, jestliže všechny vybrané atomy v derivaci ξ byly vybrány podle pravidla **R.**

To znamená, že pro každý počáteční úsek $\xi<$ derivace ξ končící dotazem Q, $\mathbf{R}(\xi<)$ je vybraný atom z Q.

Poznámka. Tak obecná definice výběrového pravidla nám dovoluje vybrat různé atomy v rezolventách, které se objevily více než jednou v dané SLD-derivaci to znamená v totožných rezolventách s různými "historiemi".

Příklad.

Uvažujme výběrové pravidlo **LR**, které vybírá nejlevější atom v sudých krocích SLD-derivace a nejpravější atom v lichých krocích

Příklad chování takového pravidla není těžké popsat formálně:

Nechť $P := \{A \leftarrow A\}$ a $Q :=$ A, A. Potom

$$A, \underline{A} \implies \underline{A}, A \implies A, \underline{A} \implies \ldots$$

je SLD-derivace podle pravidla **LR** vybraný atom je podtržen. Tedy **LR** zde vybírá atomy na různých pozicích ve stejných rezolventách.

Poznámka. Každá SLD-derivace sleduje nějaké výběrové pravidlo.

Nejpřirozenější výběrové pravidlo je *nejlevější výběrové pravidlo*, které vždy vybírá nejlevější atom v daném dotazu.

Následující výsledky ukazují, že je-li dán dotaz Q, každé výběrové pravidlo **R** generuje stejnou množinu vypočtených odpovědních substitucí pro úspěšné SLD-derivace Q podle **R**.

Začneme pomocným technickým výsledkem , který však má samostatný význam.

Lemma. (Switching)

Mějme dotaz Q_n , který obsahuje dva různé atomy A_1 a A_2. Předpokládejme, že

$$\xi := \quad Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots \; Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \Rightarrow \theta_{n+2}/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+2} \ldots$$

je SLD-derivace kde

- A_1 je vybraný atom z Q_n
- $A_2\theta_{n+1}$ je vybraný atom z Q_{n+1}

Potom pro nějaká Q_{n+1}' , θ_{n+1}' a θ_{n+2}' platí

- $\theta_{n+1}'\,\theta_{n+2}' = \theta_{n+1}\theta_{n+2}$
- existuje SLD- derivace

$$\xi' := \quad Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots \; Q_n = \theta_{n+1}'/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+1}' \Rightarrow \theta_{n+2}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+2} \ldots$$

taková, že
- ξ a ξ' se shodují až do rezolventy Q_n
- A_2 je vybraný atom z Q_n
- $A_1\theta_{n+1}'$ je vybraný atom z Q_{n+1}'
- ξ a ξ' se shodují od rezolventy Q_{n+2} dále

Poznámka. Volně řečeno, podle lemmatu je možné dva následující kroky SLD-derivace prohodit, pokud ve druhém kroku je vybrána instance "starého" atomu. Pokud se na Lemma o switchingu budeme odkazovat, budeme říkat, že kroky $(n + 1)$ a $(n + 2)$ v ξ „můžeme přepnout“ .

Situaci znázorňuje následující obrázek

$$\xi := \quad Q_0 \overset{\theta_1/c_1}{\Longrightarrow} Q_1 \ldots \; Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{\Longrightarrow} Q_{n+1} \overset{\theta_{n+2}/c_{n+2}}{\Longrightarrow} Q_{n+2} \ldots$$

$$Q_n \xrightarrow{\theta_{n+1}'/c_{n+2}} Q_{n+1}' \xrightarrow{\theta_{n+2}'/c_{n+1}} Q_{n+2}$$

Důkaz. Dříve než budeme "přepínat" (switch) pořadí SLD-derivačních kroků, připomeneme, že tuto možnost jsme dokázali pro unifikace. Pro unifikace zavedeme následující značení:

Jsou-li $A := p(s_1, \ldots, s_n)$ $\qquad H := p(t_1, \ldots, t_n)$
dva atomy se stejným predikátovým symbolem, množinu rovností k jejich unifikaci $\{s_1, = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$
budeme označovat $A = H$.

Nechť $H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1$
je vstupní klauzule pro SLD-derivační krok
. $Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{\Longrightarrow} Q_{n+1}$

a $H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2$
je vstupní klauzule pro SLD-derivační krok
. $Q_{n+1} \overset{\theta_{n+2}/c_{n+2}}{\Longrightarrow} Q_{n+2}$

Potom θ_{n+1} je mgu pro množinu $A_1 = H_1$
a θ_{n+2} je mgu pro množinu $A_2\theta_{n+1} = H_2$

Při standardisaci proměnných však dostáváme $H_2\theta_{n+1} = H_2$
odkud θ_{n+2} je mgu pro množinu $(A_2 = H_2)\theta_{n+1}$.

Podle switchingového lemmatu pro unifikace existují relevantní unifikace

θ_{n+1}' pro množinu $A_2 = H_2$

θ_{n+2}' pro množinu $(A_1 = H_1)\theta_{n+1}'$

takové, že platí

$$\theta_{n+1}'\theta_{n+2}' = \theta_{n+1}\theta_{n+2} \tag{1}$$

a

$$Var(\theta_{n+2}') \subseteq Var(\theta_{n+1}\theta_{n+2}) \cup Var(A_1 = H_1) \cup Var(A_2 = H_2) \tag{2}$$

Navíc podle lemmatu o disjuktnosti a standardizace proměnných platí

$$Var(H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1) \cap (Var(Q_n) \cup Var(H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2)) = 0$$

odkud z relevance substituce θ_{n+1}' dostáváme

$$Var(H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1) \cap Var(\theta_{n+1}') = 0 \tag{3}$$

Předpokládejme, že

$$Q_n := \mathbf{A},\ A_1, \mathbf{B},\ A_2, \mathbf{C}$$

kde bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A_1 se v Q_n vyskytuje dříve než A_2 .

Z rozšířené verze lemmatu o disjunktnosti (vstupní klauzule d_{i+1} je disjunktní se všemi rezultantami R_j , $j \leq i$, tedy i s dotazy Q_j) plyne, že vstupní klauzule $H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2$ je disjunktní v proměnných s dotazem Q_n . Použitím této vstupní klauzule na Q_n dostáváme

$$Q_{n+1}' := (\mathbf{A},\ A_1, \mathbf{B}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})\theta_{n+1}'$$

a z disjunktnosti vstupní klauzule (která je variantou c_{n+2}) v proměnných, potom i

$$Q_n = \theta_{n+1}'/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+1}'$$

První krok vyhýbky z obrázku jsme zvládli, zbývá ještě druhý. Začněme počítat

$$\theta_{n+2}'$$

$=$ {definice rezolventy}

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B})\theta_{n+1}\theta_{n+2}\mathbf{B}_2\theta_{n+2}, \mathbf{C}\theta_{n+1}\theta_{n+2}$$

$=$ {z lemmatu o disjunktnosti ($Var(Q_n) \cup Var(H_2 \leftarrow \mathbf{B}_2)) = 0$}

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})\theta_{n+1}\theta_{n+2}$$

$=$ {(1)}

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})\,\theta_{n+1}'\theta_{n+2}'$$

$=$ {(3)}

$$\mathbf{A}\,\theta_{n+1}'\theta_{n+2}'\mathbf{B}_1\theta_{n+2}'(\mathbf{B}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C})\theta_{n+1}'\theta_{n+2}'$$

takže $\theta_{n+2}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+2}$ při použití vstupní klauzule $H_1 \leftarrow \mathbf{B}_1$.

Tedy

$$Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots\ Q_n = \theta_{n+1}'/c_{n+2} \Rightarrow Q_{n+1}' \Rightarrow \theta_{n+2}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+2} \ldots$$

je opravdu SLD-derivace protože (1), (2), (3) a lemma o disjunktnosti zaručují standardizaci proměnných.

[Tím je switchingové lemma dokázáno.]

Poznámka. Poslední krok důkazu je subtilnější než se zdá. Bylo by třeba ověřit, že platí

$$Var(\theta_{n+2}') \subseteq Var(\theta_{n+1}) \cup Var(\theta_{n+2}) \cup Var(Q_n) \cup Var(H_1) \cup Var(H_2)$$

(Úloha pro volné chvíle)

Teď můžeme vyslovit hlavní výsledek o nezávislosti množiny vypočtených odpovědních substitucí na volbě výběrového pravidla.

Definice. (Ekvivalentní SLD-derivace)

Říkáme, že dvě SLD-derivace ξ a ξ' pro $P \cup \{Q\}$ jsou ekvivalentní, jestliže

- obě jsou úspěšné,
- mají stejnou délku,
- a jejich množiny vypočtených substitucí jsou stejné .

Věta. (Nezávislost na volbě výběrového pravidla)

Pro každou úspěšnou SLD-derivaci ξ pro $P \cup \{Q\}$ a výběrové pravidlo **R** , existuje úspěšná SLD-derivace ξ' pro $P \cup \{Q\}$ podle **R** , která je ekvivalentní s ξ .

Důkaz. Nechť

$$\xi := \quad Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots \; Q_{n-1} = \theta_n/c_n \Rightarrow Q_n$$

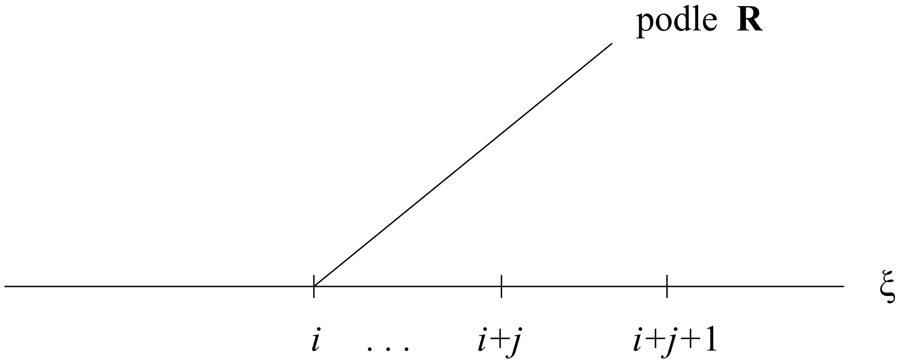
kde $Q_n = \square$ je úspěšná SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$. Nechť i je nejmenší index takový, že atom vybraný v dotazu Q_i se liší od atomu A vybraného pravidlem **R** .

ξ je úspěšná derivace, takže pro nějaké $j > 0$ je vybrána instance $A\theta_{i+1} \ldots \theta_{i+j}$ atomu A z Q_{i+j} .

Pokud takový index neexistuje, potom derivace ξ sleduje výběrové pravidlo **R** .

V ostatních případech můžeme říci, že i je první místo, kde se ξ odchyluje od výběrového pravidla **R** a j je „odklad výběru“ ξ vzhledem k **R** .

Situaci můžeme zachytit následujícím obrázkem.



Budeme definovat dvojici přirozených čísel $(n\text{-}i, j)$ jako index "odchyl-odlož" vzhledem k **R** . Pokud ξ sleduje pravidlo **R** , položíme $i = n$, $j = 0$. V takovém případě je hodnota indexu (0,0).

Tvrzení věty budeme dokazovat indukcí podle dvojic "odchyl-odlož" při lexikorafickém uspořádání.

Pokud je hodnota indexu (0,0) derivace ξ je podle výběrového pravidla **R** .

V ostatních případech můžeme použít Switchingového lemmatu a přepnout kroky $(i + j)$ a $(i + j + 1)$ v ξ a získat tak ekvivalentní SLD-derivaci ξ' pro $P \cup \{Q\}$.

Dvojice odpovídající ξ' pak bude

- $(n - i, j - 1)$ je-li $j > 1$,
- $(n - (i + 1), k)$ pro nějaké $k \geq 0$, je-li $j = 1$.

V obou případech dostaneme index, který je lexikograficky menší než index $(n - i, j)$. Podle indukčního předpokladu je ξ' ekvivalentní s nějakou SLD-derivací podle **R** takže totéž platí i pro ξ .

Ukázali jsme, že úspěšné SLD-derivace řídící se různými výběrovými pravidly jsou ekvivalentní. Tím jsme ukázali, že možnost volby podle bodu (A) neovlivňuje množiny vypočtených odpovědních substitucí.

K analýze voleb v bodech (A), (C), (D) stačilo probírat jednotlivé SLD-derivace. Naproti tomu vliv volby aplikovatelné klauzule z programu, která je formulována v bodu (B), je třeba analyzovat na množině všech výpočtů daného programu.

Jde o množinu SLD-derivací, která se přirozeným způsobem dělí do kategorií podle použitého výběrového pravidla.

Jednotlivé kategorie lze reprezentovat pomocí tak zvaných SLD-stromů.

Nezávislost na volbách podle bodů (A), (C), (D) dovoluje takové stromy definovat úsporně.

Definice. (SLD-stromy)

SLD-strom pro $P \cup \{Q\}$ při použití výběrového pravidla **R**, je strom takový, že platí

(i) jeho větve jsou SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle **R,**

(ii) uzly stromu jsou dotazy odpovídající derivace,

(iii) každý uzel (dotaz) Q' s vybraným atomem A má jediného následníka pro každou klauzuli $c \in P$ použitelnou k A, který je rezolventou Q' a c vzhledem k A.

Definice. (Úspěšné stromy)

(i) Říkáme, že SLD-strom je *úspěšný*, jestliže obsahuje prázdný dotaz,

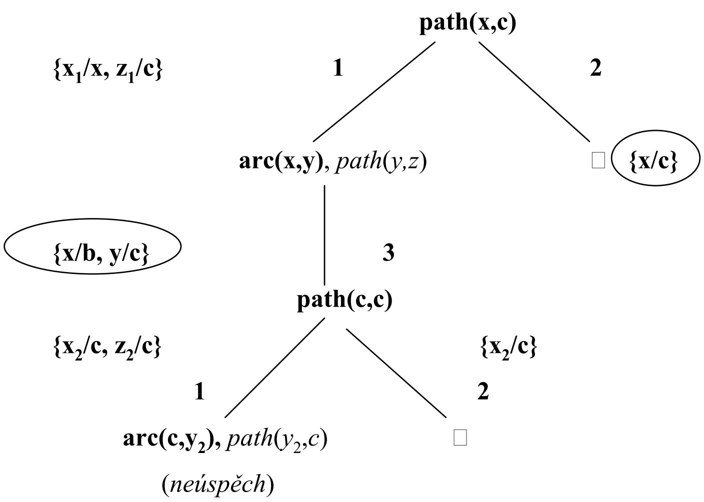
(ii) říkáme, že SLD-strom je *konečně selhávající* (*neúspěšný*), je-li konečný a neúspěšný.

Jinými slovy, SLD-strom je úspěšný, jestliže některá z jeho větví je úspěšná SLD-derivace. SLD-strom je konečně selhávající, jestliže každá jeho větev je neúspěšná.

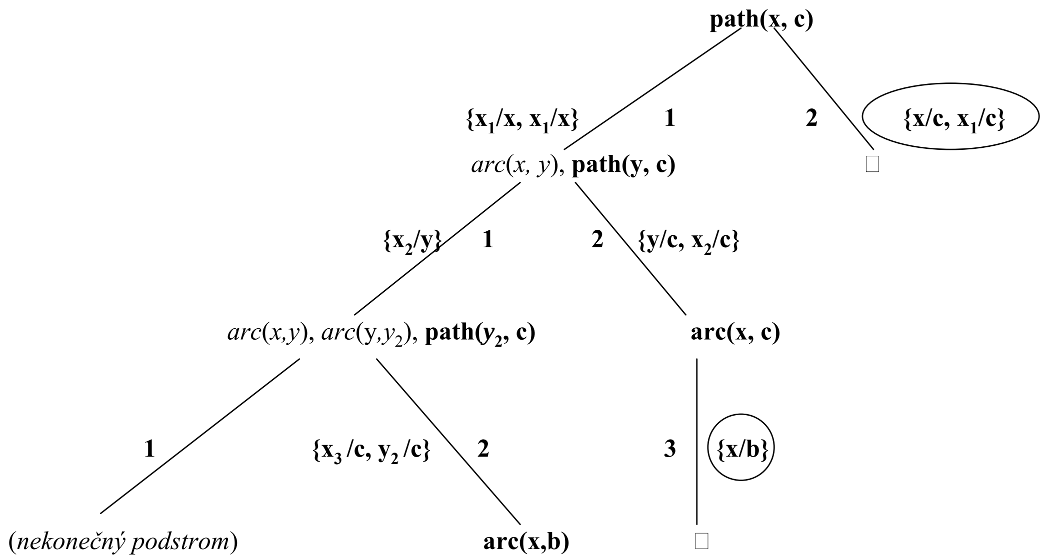
Příklad.

Hledáme cestu v orientovaném grafu, který má dva vrcholy b, c a jedinou orientovanou hranu (b,c). Hrany označujeme predikátem *arc*, existenci cesty z uzlu x do uzlu y označujeme predikátem *path*. Situaci lze popsat logickým programem *PATH*.

1. $path(x,z) \leftarrow arc(x,y), path(y,z)$.
2. $path(x,x) \leftarrow$.
3. $arc(b,c) \leftarrow$.



Úspěšný SLD-strom s výběrem nejlevějšího atomu. Množina vypočtených odpovědních substitucí sestává ze dvou prvků $\{x/b\}$ a $\{x/c\}$. Je to konečný strom.



Úspěšný SLD-strom s výběrem nejpravějšího atomu. Množina vypočtených odpovědních substitucí sestává ze dvou prvků {x/b} a {x/c} . Strom obsahuje nekonečnou větev.

Poznámka. Při dané definici SLD-stromu se nemusí všechny SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle **R** objevit v každém SLD-stromu pro $P \cup \{Q\}$ podle **R**.

Definice. (Výběrová pravidla nezávislá na variantách)

Říkáme, že výběrové pravidlo **R** je nezávislé na variantách, jestliže ve všech počátečních úsecích SLD-derivací, které jsou podobné, **R** vybere v posledním dotazu (rezolventě) atom na stejné pozici.

Poznámka 1. Výběr nejlevějšího atomu je příkladem výběrového pravidla nezávislého na variantách. Opačným příkladem je pravidlo vybírající nejlevější atom, je-li v posledním dotazu proměnná x a v ostatních případech vybírá nejpravější atom.

Máme-li program $\{p(y) \leftarrow p(y)\}$ a dotaz $p(x), q(x)$ a dvě jeho rezolventy $p(x), q(x)$ a $p(y), q(y)$, v prvním dotazu je vybrán první atom a ve druhém dotazu druhý atom.

Přitom každá SLD-derivace sleduje nějaké výběrové pravidlo nezávislé na variantách. Můžeme totiž fragment použitého výběrového pravidla vhodným způsobem dodefinovat.

Také platí, že každý SLD-strom je sestrojen podle nějakého pravidla nezávislého na variantách.

Věta. (O větvích)

Mějme libovolný SLD-strom $\boldsymbol{T}$ pro $P \cup \{Q\}$ podle výběrového pravidla $\mathbf{R}$ nezávislého na variantách. Potom každá SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle $\mathbf{R}$ je podobná některé větvi stromu $\boldsymbol{T}$.

Poznámka 2. Použijeme-li výběrové pravidlo závislé na variantách z předchozího příkladu, nahlédneme, že Věta o větvích neplatí pro každé výběrové pravidlo.

Nyní můžeme dokázat tvrzení, které bylo naznačeno ve dvou zobrazených SLD-stromech.

Důsledek. (Nezávislost na výběru pořadí klauzulí z programu)

Pokud existuje úspěšný SLD-strom pro $P \cup \{Q\}$, potom jsou všechny SLD-stromy pro $P \cup \{Q\}$ úspěšné.

Důkaz. Máme-li úspěšnou SLD-derivaci pro $P \cup \{Q\}$ a libovolný SLD-strom $\boldsymbol{T}$. Podle Poznámky 1 je $\boldsymbol{T}$ sestrojen pomocí nějakého pravidla $\mathbf{R}$ nezávislého na variantách.

Podle Věty o nezávislosti na volbě výběrového pravidla existuje úspěšná SLD-derivace ξ, podle $\mathbf{R}$.

Podle Věty o větvích je ξ podobná některé větvi stromu $\boldsymbol{T}$, to znamená, že $\boldsymbol{T}$ je také úspěšný.

Mějme dvě SLD-derivace

$\xi :=\ Q_0 \overset{\theta_1/c_1}{=\!\!>} Q_1 \ldots\ Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1} \ldots$

$\xi' :=\ Q_0' \overset{\theta_1'/c_1}{=\!\!>} Q_1' \ldots\ Q_n' \overset{\theta_{n+1}'/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1}' \ldots$

Říkáme, že tyto SLD-derivace jsou *podobné* jestliže platí

$\xi :=\ Q_0 \overset{\theta_1/c_1}{=\!\!>} Q_1 \ldots\ Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1} \ldots$

$\xi' :=\ Q_0' \overset{\theta_1'/c_1}{=\!\!>} Q_1' \ldots\ Q_n' \overset{\theta_{n+1}'/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1}' \ldots$

$Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1}$