

Substituce

Petr Štěpánek

S využitím materialu Krzysztofa R. Apta

2006

Algebra termů

Předpokládáme, že je dán jazyk L , definovali jsme množinu jeho termů.

Zavedeme některé užitečné pojmy. Připomeňme, že konstanty ztotožňujeme s funkčními symboly, které nepracují s žádnými argumenty.

Obvykle je značíme a, b, c, d, \dots

z kontextu je vždy jasné, zda jde o konstantu nebo o název klauzule, záměna nehrozí.

Term, který neobsahuje žádné proměnné nazýváme *základní* (anglicky *ground*).

Definice Je-li t term,

- množinu jeho proměnných označujeme $Var(t)$,
- říkáme, že s je **podterm** termu t , je-li s podslovem t , které je samo termem,
- je-li w podtermem s říkáme, že w **se vyskytuje v** s nebo, že w **má výskyt v termu** s . V obecném případě může mít podterm w v termu s více výskytů, například $g(f(x), f(x))$,
- každý term je svým podtermem, je-li s podterm termu t a je různý od t , říkáme, že s je **vlastním podtermem** t .

Substituce

Substituce váží termy k proměnným. V logickém programování jsou jediným prostředkem, který proměnným přiřazuje hodnoty.

Relevantní substituce jsou během výpočtu automaticky generovány - na rozdíl od explicitního přiřazování hodnot proměnným v imperativních jazycích - říkáme, že proměnné nabývají svých hodnot implicitně.

Definice

Substituce θ je konečné zobrazení, které každé proměnné x ve svém definičním oboru přiřazuje nějaký term t různý od x .

Protože θ je zobrazení, můžeme v takovém případě psát $\theta(x) = t$.

Podrobněji, substituce je zobrazení θ , které zapisujeme

$$\theta = \{x_1 / t_1, x_2 / t_2, \dots, x_n / t_n\} \quad (1)$$

takové, že platí

- x_1, x_2, \dots, x_n jsou různé proměnné,
- t_1, t_2, \dots, t_n jsou termy a
- x_i je různé od t_i , pro $i, 1 \leq i \leq n$

Je-li $n = 0$, říkáme že (1) je prázdná substituce a značíme ji ε .

Množinu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nazýváme definičním oborem θ a značíme $Dom(\theta)$,

množinu $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ nazýváme oborem hodnot θ a značíme $Range(\theta)$,

množinu všech proměnných obsažených v termech t_1, t_2, \dots, t_n označujeme $Ran(\theta)$, dále

$$Var(\theta) = Dom(\theta) \cup Ran(\theta)$$

je množina všech proměnných, které se vyskytují v substituci θ .

Je-li dána množina proměnných V potom výrazem $\theta | V$ označujeme substituci, která vznikne ze substituce θ omezením jejího definičního oboru na proměnné z V .

Jsou-li všechny termy z oboru hodnot θ základní, říkáme že **substítuce θ je základní**.

Jsou-li všechny termy z oboru hodnot θ proměnné, říkáme že θ je **substítuce proměnných**.

Speciálním případem takové substítuce je permutace definičního oboru, tedy prosté zobrazení množiny $Dom(\theta)$ na $Dom(\theta)$, které nazýváme **přejmenování proměnných**.

Příkladem přejmenování je třeba substítuce $\{x/y, y/z, z/x\}$.
Prázdná substítuce je také přejmenování.

V literatuře se používá i jiná definice přejmenování, ale dá se ukázat, že každá taková substítuce se dá rozšířit do substítuce, která je přejmenováním v našem smyslu.

Definice (substituce za proměnné v termu)

Je-li dán term s a substituce θ , výraz, který vznikne z termu s současným nahrazením všech výskytů proměnných

$$x \in \text{Var}(s) \cap \text{Dom}(\theta)$$

odpovídajícím termem $\theta(x)$, označíme $s\theta$ a budeme ho nazývat **aplikací substituce θ na s** .

Není těžké ověřit, že $s\theta$ je také term, říkáme, že je to **instance** s .

- Pokud instance $s\theta$ neobsahuje proměnné, říkáme že je základní.
- Je-li θ přejmenování, říkáme že $s\theta$ je variantou termu s .
- Říkáme, že term s je obecnější než term t , je-li t instancí s .

Příklad 1. Necht' s je term $f(x, g(x, y, h(x, z)))$ a θ je substituce

$$\theta = \{ x / k(u, v), y / l(z), z / k(x, y) \}$$

potom $s\theta$ je term

$$f(k(u, v), g(k(u, v), l(z), h(k(u, v), k(x, y))))$$

Příklad 2. (Varianty)

- a) $f(y,x)$ je variantou $f(x,y)$, protože $f(y,x) = f(x,y)\{x/y, y/x\}$
- b) $f(x,y')$ je variantou $f(x,y)$, protože $f(x,y') = f(x,y)\{y/y', y'/y\}$
Povšimněme si, že vazba y'/y byla přidána, aby substituce byla přejmenováním.
- c) $f(x,x)$ není variantou $f(x,y)$. Kdyby tomu tak bylo, pak $f(x,x) = f(x,y)\theta$ pro nějaké přejmenování θ . Tedy $y/x \in \theta$ a pro nějakou proměnnou z různou od x platí $x/z \in \theta$. Potom nutně $f(x,y)\theta = f(z,x)$ - spor.

Substituce za proměnné v termu může být také definována indukcí podle složitosti termu.

Lemma 1.

Je-li s term a θ substituce, instance $s\theta$ může být definována indukcí podle struktury termu s .

- a) je-li s proměnná x , potom $s\theta$ je $\theta(x)$, pokud $x \in Dom(\theta)$, jinak x .
- b) je-li s tvaru $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ a instance termů t_i již byly sestrojeny, potom instance $s\theta = f(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_n\theta)$.
- c) Jsou-li θ a η substituce, potom $\theta = \eta$, právě když pro libovolnou proměnnou x platí $\theta(x) = \eta(x)$.

Definice. (Složení substitucí)

Jsou-li θ a η substitute, jejich složení $\theta\eta$ definujeme takto: pro libovolnou proměnnou x položíme $(\theta\eta)(x) = (x\theta)\eta$.

Jinými slovy, $\theta\eta$ přiřazuje proměnné x term, který získáme substitucí η do instance $x\theta$.

Je zřejmé, že pokud x není prvkem množiny $Dom(\theta)$ u $Dom(\eta)$, platí $(\theta\eta)(x) = x$. To znamená, že $\theta\eta$ je zobrazení proměnných do množiny termů, které je s výjimkou konečné množiny všude identické. Tím jednoznačně určuje substituci.

Snadno se ověří, že pro prázdnou substituci ε a θ platí $\theta\varepsilon = \theta = \varepsilon\theta$.

Složitější je složení libovolných dvou substitucí vypočítat.

Lemma 2. (Složená substituce)

Mějme dvě substituce

$$\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n\} \quad \text{a} \quad \eta = \{y_1/s_1, y_2/s_2, \dots, y_m/s_m\}$$

Složená substituce $\theta\eta$ je rovna zobrazení ψ , které vznikne následujícím postupem

a) z posloupnosti

$$\{x_1/t_1\eta, x_2/t_2\eta, \dots, x_n/t_n\eta, y_1/s_1, y_2/s_2, \dots, y_m/s_m\} \quad (2)$$

nejprve vynechejme všechny vazby $x_i/t_i\eta$ takové, že $x_i = t_i\eta$ a potom všechny vazby y_j/s_j , kde $y_j \in \text{Dom}(\theta)$.

b) zbytek posloupnosti (2) označme ψ . Je to konečné zobrazení proměnných do termů a rozborem případů lze ověřit, že pro každou proměnnou x platí $\psi(x) = \theta\eta(x)$.

Příklad.

Nechť $\theta = \{u/z, x/3, y/f(x,1)\}$ a $\eta = \{x/4, y/f(4,1), z/u\}$, potom
$$\theta\eta = \{x/3, y/f(4,1), z/u\}$$

Výpočet složené substituce není jednoduchý a není ani jednoduché pravidlo, jak definovat její definiční obor a obor hodnot.

Uvedeme ještě dvě jednoduchá fakta o skládání přejmenování.

Lemma 3.

- (i) Pro každé přejmenování θ , existuje právě jedna substituce θ^{-1} , taková, že $\theta\theta^{-1} = \varepsilon = \theta^{-1}\theta$. θ^{-1} je také přejmenování.
- (ii) Je-li $\theta\eta = \varepsilon$, potom θ i η jsou přejmenování.

Lemma 4. (Asociativnost)

$$(i) \quad (s\theta)\eta = s(\theta\eta)$$

$$(ii) \quad (\theta\eta)\gamma = \theta(\eta\gamma)$$

Důkaz (i) provedeme indukcí podle složitosti termu s podle lemmatu 1.

a) je-li s proměnná x , potom $(x\theta)\eta = (\theta(x))\eta = x(\theta\eta)$

b) je-li s tvaru $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ a pro termy t_i již (i) platí, potom

$$\begin{aligned} (s\theta)\eta &= f((t_1\theta)\eta, (t_2\theta)\eta, \dots, (t_n\theta)\eta) \\ &= f((t_1(\theta\eta), t_2(\theta\eta), \dots, t_n(\theta\eta))) \\ &= f(t_1, t_2, \dots, t_n)(\theta\eta) \\ &= s(\theta\eta) \end{aligned}$$

(ii) Pro libovolnou proměnnou x dostáváme

$$\begin{aligned}x(\theta\eta)\gamma &= (x\theta\eta)\gamma && \textit{definice skládání} \\ &= ((x\theta)\eta)\gamma && \textit{podle (i) pro } x \\ &= x\theta(\eta\gamma) && \textit{podle (i) pro } x\theta\end{aligned}$$

tedy $(\theta\eta)\gamma = \theta(\eta\gamma)$.

Skládání substitucí je asociativní operace, to znamená, že při skládání posloupností substitucí nezáleží na uzávorkování.

Lemma 5. (Varianty)

- (i) Term s je variantou termu t , právě když s je instancí t a t je instancí s .
- (ii) Je-li term s variantou t , potom $s = t\theta$, kde θ je přejmenování takové, že $Var(\theta) \subseteq Var(s) \cup Var(t)$.

Důkaz. (i) (\Rightarrow) Podle předpokladu je $s = t\theta$, kde θ přejmenování. Necht' θ^{-1} je přejmenování z lemmatu 3. Potom $t = t\theta\theta^{-1} = s\theta^{-1}$.

(\Leftarrow) Říkáme, že funkce f nemá pevný bod, jestliže $f(x) \neq x$ platí pro každé x . Ke konstrukci přejmenování ze dvou substitucí budeme potřebovat následující tvrzení.

Pozorování. Každé prosté zobrazení f konečné množiny A na množinu B lze rozšířit na permutaci g sjednocení $A \cup B$. Pokud f nemá pevné body, g lze setrojit tak, že také nemá pevné body.

Důkaz pozorování. Konečné množiny A a B mají stejný počet prvků, to znamená, že také množiny $A - B$ a $B - A$ mají stejný počet prvků. Necht' h je prosté zobrazení $B - A$ na množinu $A - B$. Položíme-li $g = f \cup h$ dostaneme permutaci $A \cup B$. Je zřejmé, že pokud f nemá pevné body, nemá je ani g .

Pokračování důkazu (i). Podle předpokladu existují substituce θ a η , takové, že $s = t\theta$ a $t = s\eta$. Tedy

$$t = t\theta\eta \tag{3}$$

Z (3) plyne pro libovolné dvě různé proměnné $x, y \in Var(t)$, platí že $x\theta\eta$ je různé od $y\theta\eta$ a proto také $x\theta \neq y\theta$.

- $x\theta\eta \neq y\theta\eta$ a proto také
- $x\theta \neq y\theta$ navíc
- $x\theta\eta$ a $y\theta\eta$ jsou proměnné a pak nutně i $x\theta$ a $y\theta$ jsou proměnné

Můžeme předpokládat, že $Dom(\theta) \subseteq Var(t)$. Ukázali jsme, že θ je prostá substituce proměnných za proměnné.

Podle předchozího pozorování substituce θ může být rozšířena do přejmenování γ takového, že $Dom(\gamma) = Var(\theta)$. Dokážeme-li, že

$$Var(t) \cap Dom(\gamma) \subseteq Dom(\theta) \quad (4)$$

Potom $t\gamma = t\theta = s$ a s je variantou t .

K důkazu tvrzení (i) zbývá dokázat (4). Předpokládejme, že existuje proměnná $x \in \text{Var}(t) - \text{Dom}(\theta)$. Potom podle (3)

$$x = x\theta\eta = x\eta \quad \text{tedy}$$

x není prvkem $\text{Dom}(\eta)$ potom také

x není prvkem $\text{Ran}(\theta)$ protože jinak by existovalo y ,

$y \in \text{Var}(t)$, y/x takové, že $y/x \in \theta$ a $y\theta\eta = y$, odkud

$x \in \text{Dom}(\eta)$ - spor.

Dokázali jsme

$$(\text{Var}(t) - \text{Dom}(\theta)) \cap \text{Ran}(\theta) = \emptyset \quad \text{odkud plyne}$$

$$\text{Var}(t) \cap \text{Dom}(\gamma) \subseteq \text{Dom}(\theta) \quad (4)$$

protože

$$\text{Dom}(\gamma) = \text{Var}(\theta).$$

Tím je (i) dokázáno.

Důkaz (ii). Stačí si všimnout, že přejmenování θ , které jsme použili při důkazu (i) splňuje

$$Var(\gamma) = Var(\theta) \subseteq Var(s) \cup Var(t)$$

Poznámka na konec. Zavedené pojmy instance, základní instance, varianty a značení $Var(\dots)$, $Dom(\dots)$, $Rang(\dots)$, atd. Byly zavedeny jen pro termy.

Je zřejmé, že mohou být definovány stejným způsobem pro libovolné řetězce, nejenom termy. Zde máme na mysli jejich pozdější použití na atomické formule (atomy), které se svou strukturou neliší od termů.

Za zapamatování stojí především Lemma 4 o asociativitě a Lemma 5 o variantách.

Tyto pojmy, značení a výsledky budeme bez dalšího používat i pro jiné syntaktické konstrukce.