Základy Logického Kalkulu

Na střední škole jste se seznámili s kalkulováním s čísly a to nejdříve přirozenými, dále pak racionálními, reálnými a později i komplexními. Naučili jste se řešit rovnice, jejich soustavy a převádět slovní úlohy na kalkulus rovnic. Většina z vás se touto problematikou zabývala nejdříve z donucení, protože jste se to museli ve škole učit, později v této problematice našla zalíbení - tedy spíše citový vztah (řešení příkladů vám např. přinášelo větší intelektuální uspokojení než "šprtání" německých slovíček). Málokdo se však asi zamyslel nad silou použitého formalizmu a nad tím, kolik lidského úsilí je skryto v jeho "jednoduchosti" a "eleganci". Proveďte si myšlenkový experiment s řešením slovní úlohy bez znalosti "kalkulu" rovnic. Je docela pravděpodobné, že po jisté delší době zkoušení dosazováním různých hodnot jako hledaných výsledků, dospějete k vycítění závislostí popsaných úlohou, které vás dovede ke správnému řešení. Dále je docela pravděpodobné, že po vyřešení mnoha slovních úloh získáte "cit" pro vyhledání řešení. Jak je však takovýto postup intelektuálně namáhavý ve srovnání s vyřešením jednoduché rovnice, na kterou úloha vede. Navíc v případě neřešitelnosti slovní úlohy budete jen těžko bez "kalkulu rovnic" vyhledávat přesvědčivé argumenty prokazující tuto neřešitelnost. Za povšimnutí stojí rovněž skutečnost, že početní kalkulus si vynutil vytvoření oboru reálných a komplexních čísel, ve kterých se dobře pracuje, ale který nutně obsahuje spoustu "nesmyslných" čísel, které nikdo nikdy potřebovat nebude.

Položme si nyní otázku, zda situace není analogická, jsou-li předmětem našeho zájmu různá, např. matematická, tvrzení, tedy zda tato tvrzení mohou hrát roli čísel v dříve uvedeném odstavci. Můžeme být např. postaveni před úlohu vyčlenit z databáze soustavu vět určených nějakou poměrně komplikovanou podmínkou a přitom pro snazší vyhledání bychom uvítali vyjádření této podmínky jako několik možných případů, z nichž každý je současným splněním několika základních podmínek.

Vypracování logického kalkulu může být podobně užitečné, jako bylo vypracování kalkulu pro práci s čísly. Vypracování základů tohoto kalkulu bude předmětem našeho zájmu.

Výrokový počet.

Začněme nejdříve nejjednodušší oblastí, sice zkoumáním logických spojek a výroků, které jsou jimi tvořeny na základě výroků jednodušších. Je to analogie rozboru souvětí, o strukturu stavby jednotlivých vět se ve výrokovém počtu nezajímáme. Matematická analogie tohoto rozboru bude provedena při vyšetřování predikátového počtu. Již zde musíme upozornit na odchylky od běžného porozumění, které při matematickém zpracování vznikají. Na příklad při matematizaci logické spojky implikace (když, pak) nás zajímá jen pravdivostní hodnota jednotlivých složek výroku a zcela odhlížíme od příčinné souvislosti míněné v běžném jazyce. Markantně se tento rozdíl projeví ve výroku: "Nejela tramvaj, a proto jsem přišel pozdě." Pro pravdivost tohoto výroku nám bude při naší matematizaci postačovat skutečnost, že jsem přišel pozdě, bez ohledu na to, zda byla, nebo nebyla porucha v hromadné dopravě, zatímco v běžném pojetí, kde je kladen důraz na příčinnou souvislost, je uvedený výrok chápán jako nehorázná lež v případě, že porucha v dopravě nebyla.

Vymezíme nejdříve základní symboly používané v oblasti, kterou se budeme zabývat. (Souhrn těchto symbolů se nazývá abeceda a spolu s vyčleněním speciálních slov - tzv. formulí - určuje tzv. jazyk.)

1) Výrokové proměnné: P,Q,R, ... opatřené indexy. V indexaci si ponecháme libovůli, ta se může měnit podle zkoumané situace, můžeme používat čárky, kolečka, háčky, ale též přirozená, nebo reálná čísla, případně i jiné objekty, bude-li to situace vyžadovat.

2) Výrokové spojky: $\neg$, $\rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\equiv$

3) Pomocné symboly: (,).

Uvádíme zde jen základní běžně používané logické spojky. Používají se i mnohé jiné. Ve výpočetní technice se i ve strojových instrukcích běžně vyskytuje např. operace realizující negaci ekvivalence, nebo uveďme Shefferovu spojku (disjunkce negací), která je zajímavá tím, že se z ní samotné dají definovat ostatní logické spojky. V matematice slovem nad určitou abecedou obvykle rozumíme libovolnou konečnou posloupnost symbolů této abecedy (přitom závisí na pořadí) a zcela odhlížíme od požadavku smysluplnosti kladeného v běžné řeči. Slova, která budou pro nás smysluplná, budeme nazývat formule (na střední škole byla nazývána výrokové formy). Později, při vyšetřování predikátového počtu, budeme vyšetřovat i další smysluplná slova tzv. termy.

Definice: 1) Každá výroková proměnná je formule.

2) Pokud slova φ a ψ jsou formule, pak též slova $\neg\varphi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$ jsou formule.

3) Každá formule se získá z výrokových proměnných konečným počtem aplikací pravidel uvedených v 2).

Uvedený způsob definice se nazývá induktivní a je v matematické logice velmi často používán.

Úkol: $(P\rightarrow \neg\neg(Q'\vee \neg(R\& \neg Q)))$ je formule, dokažte.

$((((\rightarrow$ není formule, dokažte.

Uvedený způsob definice má tu výhodu, že prověřením konečně mnoha případů jsme schopni prověřit platnost tvrzení o potenciálně nekonečném souboru příslušnou induktivní definicí vymezeném. Stačí totiž prověřit platnost tvrzení pro startovací krok (výrokové proměnné v našem případě) a dále prověřit, že jednotlivá pravidla konstrukce složitějších objektů tvrzení zachovávají. Tvrzení pak platí pro potenciálně nekonečný soubor všech slov, která mají tvar (formu) vymezený příslušnou induktivní definicí.

Jako příklad si může čtenář dokázat následující větu o substituci při tvorbě formulí.

Věta: Nechť φ, ψ jsou formule. Jestliže některé výskyty výrokové proměnné P ve formuli φ nahradíme formulí ψ, pak slovo, které získáme, je opět formule.

Pro pohodlí zápisu budeme vnější závorky u formulí vynechávat. Později budeme rovněž vynechávat závorky, které neohrozí správné chápání formule. Na příklad po důkazu asociativního zákona budeme používat $\varphi\&\psi\&\chi$.

Obraťme se nyní k matematizaci pravdy v námi vyšetřované situaci. Výrokové proměnné chápeme jako objekty u nichž je smysluplné se ptát, zda jsou pravdivé, nebo nepravdivé. Přitom však nemusíme jejich pravdivostní hodnotu znát, nebo může tato hodnota záviset na dalších okolnostech. Hlubší analýzou struktury těchto objektů se v rámci výrokového počtu nezabýváme. Příkladem takových objektů může sloužit: Venku prší; 3+5=2; x+5>7; pro žádnou čtveřici přirozených čísel x,y,z,n, kde n>2, neplatí

$x^n+y^n=z^n$. Ohodnocením výrokových proměnných rozumíme zobrazení, které každé výrokové proměnné přiřazuje hodnotu 0 nebo 1, tyto hodnoty chápeme jako nepravda a pravda a nazýváme je pravdivostní hodnoty. Pro stanovení pravdivostní hodnoty formule výrokového počtu při daném ohodnocení použijeme opět induktivní definice.

Definice: Hodnota formule φ při ohodnocení e (značíme $\varphi[e]$).

1) Je-li φ výroková proměnná P, pak $\varphi[e]$ značí hodnotu, která je výrokové proměnné ohodnocením přiřazena.

2) Hodnoty formulí $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \,\&\, \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \equiv \psi$ při ohodnocení e získáme na základě hodnot φ, ψ podle následujících tabulek:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \,\&\, \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \equiv \psi$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

Negace tedy převrací pravdivostní hodnoty; implikace je pravdivá, když předpoklad je nepravdivý a také když závěr je pravdivý; konjunkce je pravdivá, když obě její složky jsou současně pravdivé; disjunkce je pravdivá, když alespoň jedna z jejích složek je pravdivá a ekvivalence je pravdivá, když její složky nabývají stejné pravdivostní hodnoty. Vzhledem k induktivnímu způsobu definice formule jsme již schopni určit hodnotu libovolné formule při daném ohodnocení e. V konkrétních případech se jedná o tvorbu jednoho řádku z tabulky výrokové formy probírané na střední škole.

Definice: 1) Řekneme, že systém formulí $\mathcal{A}$ je ohodnocením e splněn (je pravdivý při ohodnocení e) - značení $\mathcal{A}[e]=1$, jestliže každá formule tohoto systému je při ohodnocení e pravdivá.

2) Řekneme, že systém formulí $\mathcal{A}$ je splnitelný, jestliže existuje ohodnocení e takové, že $\mathcal{A}[e]=1$.

3) Řekneme, že systém formulí $\mathcal{A}$ je pravdivý, jestliže je splněn při každém hodnocení e. Tuto okolnost značíme $|=\mathcal{A}$. Pro jednu formuli užíváme $|=\varphi$ (místo $|=\{\varphi\}$).

Poslední oblastí, kterou budeme matematizovat je dedukce.

Definice: 1) Řekneme, že formule φ je (tautologicky) odvoditelná ze systému formulí $\mathcal{A}$ (značíme $\mathcal{A}|= \varphi$), jestliže φ je splněna každým ohodnocením, které splňuje systém $\mathcal{A}$.

2) Řekneme, že systém formulí $\mathcal{B}$ je (tautologicky) odvoditelný ze systému formulí $\mathcal{A}$ (značíme $\mathcal{A} |= \mathcal{B}$), jestliže každá formule φ ze systému $\mathcal{B}$ je odvoditelná z $\mathcal{A}$.

Poznamenejme, že systém formulí je odvoditelný z prázdného systému, právě když je pravdivý. Tomu odpovídá i naše značení.

Základní vlastnosti, které od odvoditelnosti očekáváme jsou:

1) $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$, pak $\mathcal{B}|= \mathcal{A}$.

2) $\mathcal{A}|=\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}|=\mathcal{C}$, pak $\mathcal{A}|=\mathcal{C}$.

3) $\mathcal{A}|=\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}|=\mathcal{C}$, pak $\mathcal{A} |=\mathcal{B} \cup\mathcal{C}$.

Z nich lze odvodit $A \models \emptyset$; $A \models A$; když $A \models C$ a $B \supseteq A$, pak $B \models C$; $B \subseteq C$ a $A \models C$, pak $A \models B$.

Úkol: Dokažte základní vlastnosti a na jejich základě prověřte odvozené.

Zde opět upozorňuji na situaci, kdy matematizace může zkreslit skutečnost. Zavalení mnoha zbytečnými fakty může někdy ztížit důkaz. Tato narážka však nechce odradit čtenáře od studia, neboť nejhezčí obvykle bývají důkazy používající faktů ze zcela nečekaných oblastí.

Užitečným pozorováním je, že dvě formule φ, ψ jsou ekviodvoditelné ($\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$), právě když mají stejnou tabulku.

Další vlastnosti $\models$ se již váží k logickým spojkám.

Pravidlo odloučení (Modus ponens): $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$

Věta o dedukci: $A \models \varphi \rightarrow \psi$ právě když $A, \varphi \models \psi$.

Úkol: Prověřte platnost pravidla odloučení a věty o dedukci.

Uvědomte si, že se jedná o zcela běžný způsob, jak se v matematice dokazuje tvrzení tvaru implikace. Předpoklad z implikace přidáme k ostatním předběžným předpokladům a snažíme se dokázat závěr.

Ve výrokovém počtu jsou pro nás zvláště zajímavé ty formule, které bez ohledu na ohodnocení nabývají hodnoty pravda, tedy ty formule, které jsou odvoditelné z prázdného systému formulí. Tyto formule nazýváme tautologie. Pro zjišťování, zda je formule tautologií jste na střední škole používaly metodu tabulek. Následující příklad chce ukázat, že uvedené jednoduché věty mohou značně usnadnit úkol prověřit, že některá formule je tautologií.

Prověříme $\models (P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S))) \rightarrow (R \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow S)))$.

Na základě několikanásobného užití věty o dedukci zjistíme, že máme prověřit $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S)), R, Q, P \models S$. Použijeme-li několikanásobně pravidlo odloučení, získáme postupně $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S)), R, Q, P \models Q \rightarrow (R \rightarrow S), R \rightarrow S, S$. Srovnáme-li námi předvedený důkaz s tabulkovou metodou, zjistíme, že je nejen mnohem elegantnější a kratší, ale též mnohem průkaznější. V komplikované tabulce o 16ti řádcích je totiž značné nebezpečí výskytu chyby. Výhodou tabulkové metody je však to, že pro malý počet výrokových proměnných vždy přináší rozhodnutí. (Najde ohodnocení, při kterém formule neplatí, pokud takové existuje).

Větu o dedukci později reformulujeme pro predikátový počet. Nyní pouze zdůrazněme fakt, že při jejím běžném použití v matematice musíme zaručit, že formule, které vstupují do hry "se chovají jako výroky", tedy, že jejich pravdivostní hodnota (o které nemusíme vědět, zda je pravda nebo nepravda) se během úvahy nezmění. Následující příklad je varováním.

Jestliže napíšeme rovnost x=2 jako úvodní předpoklad, rozumíme tím v běžné matematice, že za proměnnou x můžeme dosadit jakýkoliv výraz a učiníme tím správnou dedukci. Nesprávné použití věty o dedukci je pak vyjádřeno následující úvahou: $x=2 \models y+1=2 \models x+1=2$, tedy $x=2 \rightarrow x+1=2$. (Zde jsme použili konvence zřetězeného psaní formulí oddělených $\models$ místo správnějšího zápisu, ve kterém by byly formule mezi $\models$ zopakovány a jednotlivé celky obsahující symbol $\models$ odděleny a to nejlépe textem. Takové konvence používáme v textu i dále. Při tom spoléháme na to, že přesný význam bude patrný ze souvislosti.) Nesprávnost úvahy byla v tom, že jsme x=2 považovali za výrok, přestože pravdivostní hodnota x=2 je ovlivněna volbou x. Při běžných matematických úvahách čelíme uvedenému nebezpečí např. tak, že prohlásíme "nechť x je pevné, ale libovolné", pak za pevné x nemůžeme nic dosadit a nesprávnou úvahu již neprovedeme. Jiný oprávněný způsob je, že vyjdeme od výroku:"pro každé x, x=2" a dospějeme k výroku "pro každé x, x+1=2", pak již správné použití věty o dedukci dává výrok "když pro každé x platí x=2, pak pro každé x platí x+1=2" a toto tvrzení (třebaže je jeho obsah podivný), lze již jistě přijmout jako pravdivé. Uvedený druh matematických důkazových úvah je mimo jiné zkoumán v predikátovém počtu.

Další pravidlo, které je okamžitě zřejmé z definice |= a umožňuje nám umocnit sílu každé odvozené dedukce na potenciálně nekonečný systém dedukcí (každou jednotlivou dedukci můžeme chápat jako celé schéma dedukcí) je následovné. Pokud $\mathcal{A}\models\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ vznikne z $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tak, že v každé formuli z $\mathcal{A}$ i z $\mathcal{B}$ nahradíme všechny výskyty výrokové proměnné P formulí φ, pak opět $\mathcal{A}_1\models\mathcal{B}_1$. Speciálně je vhodné si toto pravidlo uvědomit pro případ $\models\psi$.

Dále se zaměříme na vyhledávání matematických vět o výrocích, které vytvoří kalkulus manipulování s výroky a symbolem |=. Užitečnost tohoto kalkulu snad již byla prokázána prvním příkladem.

Při odvozování se většinou stavíme do pozice, že věříme v pravdivost předběžných předpokladů a z nich se snažíme odvodit užitečný závěr. Jiný přístup máme při důkazu sporem. Formu důkazu sporem vystihneme ve výrokovém počtu následující větou.

Věta o důkazu sporem: $\mathcal{A}\models\varphi$ právě když $\mathcal{A}, \neg\varphi\models$ spor. (Při tom nám za spor může posloužit např. $\neg(P\rightarrow P)$, nebo kterákoliv jiná formule nabývající hodnotu nepravda nezávisle na ohodnocení.)

Úkol: Prověřte správnost uvedené věty.

Užitečným pozorováním je, že spor získáme např. tehdy, když se nám podaří odvodit současně φ i $\neg\varphi$.

Použití věty o důkazu sporem demonstrujeme na prověření faktu, že formule $\varphi\rightarrow\psi$ a $\neg\psi\rightarrow\neg\varphi$ jsou ekviodvoditelné ($\varphi\rightarrow\psi\models\neg\psi\rightarrow\neg\varphi\models\varphi\rightarrow\psi$).

Pro prověření $\neg\psi\rightarrow\neg\varphi\models\varphi\rightarrow\psi$ stačí za použití věty o dedukci a věty o důkazu sporem prověřit $\neg\psi\rightarrow\neg\varphi, \varphi, \neg\psi\models$ spor. Z uvedených předpokladů získáme na základě pravidla odloučení φ i $\neg\varphi$, což nám dává spor. Podobně k prověření druhé vlastnosti stačí $\varphi\rightarrow\psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\models$ spor. Protože φ a $\neg\neg\varphi$ mají stejnou tabulku, jsou ekviodvoditelné a pak již snadno odvodíme ψ a současně $\neg\psi$.

Dalším užitečným pozorováním je $\varphi\&\psi\models\varphi, \psi\models\varphi\&\psi$. To nám umožní dokázat asociativní a komutativní zákon pro spojku & ve tvaru $\varphi\&(\psi\&\chi)\models(\varphi\&\psi)\&\chi\models\varphi\&(\psi\&\chi)$ a $\varphi\&\psi\models\psi\&\varphi\models\varphi\&\psi$.

Poslední základní technickou větou je věta o důkazu rozborem případů. Abychom tuto větu přiblížili, připomeňme, jak dokážeme, že součin dvou po sobě následujících přirozených čísel je číslo sudé. Když n je číslo sudé, pak i $n\bullet(n+1)$ je číslo sudé, když n je číslo liché, pak n+1 je číslo sudé, a tedy i $n\bullet(n+1)$ je číslo sudé. Odtud usuzujeme, že je-li n číslo sudé nebo číslo liché - tedy číslo libovolné, platí $n\bullet(n+1)$ je sudé.

Věta o důkazu rozborem případů: $\mathcal{A}, \varphi\vee\psi\models\chi$, právě když $\mathcal{A}, \varphi\models\chi$ a současně $\mathcal{A}, \psi\models\chi$.

Úkol: Prověřte pravdivost uvedené věty.

Speciálně s $\varphi\vee\psi|=\varphi\vee\psi$ získáme $\varphi|=\varphi\vee\psi$ a $\psi|=\varphi\vee\psi$.

Na základě této věty můžeme odvodit komutativní a asociativní zákon pro $\vee$. Můžeme však odvodit i distributivní zákony $\varphi\&(\psi\vee\chi)|=(\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)|=\varphi\&(\psi\vee\chi)$ a $\varphi\vee(\psi\&\chi)|=(\varphi\vee\chi)\&(\varphi\vee\chi)|=\varphi\vee(\psi\&\chi)$.

Prověříme první z nich. Na jednu stranu máme prověřit $\varphi,\psi\vee\chi|=(\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)$, což podle věty o rozboru případů znamená prověřit $\varphi,\psi|=(\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)$ a $\varphi,\chi|=\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)$. První dedukci získáme následovně $\varphi,\psi|=\varphi\&\psi|=(\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)$ a druhou analogicky. Z druhé strany použijeme opět věty o rozboru případů a odvodíme $\varphi\&\psi|=\varphi,\psi|=\varphi,\psi\vee\chi|=\varphi\&(\psi\vee\chi)$; s $\varphi\&\chi$ postupujeme analogicky.

Domnívám se, že na základě uvedených vět a příkladů již získal čtenář dostatečné zázemí pro to, aby se radši pokoušel ověřit pravdivost formule výrokového počtu jejím "odvozením" (prokázáním pravdivosti na základě uvedených vět) než tabulkou.

Poslední běžně užívanou logickou spojkou, kterou jsme dosud nevyšetřovali je $\equiv$. Zde je vhodné si uvědomit následující charakterizaci.

Věta: $A|=\varphi\equiv\psi$ právě tehdy, když $A,\varphi|=\psi$ a $A,\psi|=\varphi$.

Např. první distributivní zákon pak můžeme přepsat do tvaru

$|=\varphi\&(\psi\vee\chi)\equiv(\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)$.

Zkoumejme nyní, co se stane, když v tabulkách formulí výrokového počtu zaměníme všude pravdivostní hodnoty 0 na 1 a 1 na 0. Tabulka negace, která jen zaměňuje pravdivostní hodnoty za opačné zůstane zachována, tabulka konjunkce přejde na tabulku disjunkce a obráceně, tabulka implikace přejde na tabulku negace obrácené implikace a obráceně, tabulka ekvivalence přejde na tabulku negace ekvivalence a obráceně. To nás vede k pojmu duality a jeho využití.

Definice: Navzájem duálními symboly jsou výrokové proměnné a jejich negace, negace je samoduální, konjunkce a disjunkce jsou duální, implikace a negace obrácené implikace jsou duální, ekvivalence a její negace jsou duální.

K formuli φ získáme duální formuli φ^d tak, že ve slově φ nahradíme výrokové proměnné jejich negacemi a logické spojky spojkami duálními. Podle toho, co jsme uvedli o tabulkách duálních spojek zjistíme, že φ^d má stejnou tabulku jako $\neg\varphi$ a získáme tak následující větu o dualitě.

Věta: $|=\neg\varphi\equiv\varphi^d$.

Speciálně dostáváme De Morganova pravidla $\neg(\varphi\vee\psi)\equiv\neg\varphi\&\neg\psi$ a $\neg(\varphi\&\psi)\equiv\neg\varphi\vee\neg\psi$. Uvedená věta nám dává možnost netriviální formy negování při použití věty o důkazu sporem.

Podle námi provedeného triku se vzájemnou záměnou pravdy a lži se zdá, že tyto dvě pravdivostní hodnoty jsou zcela rovnocenné. To je pravda jen částečně - pouze v námi zavedeném kalkulu. Jakmile výroky v sobě zahrnují nějakou formu výpovědi o sobě, pak se toto rovnocenné postavení ztrácí. Hezkým příkladem toho je tvrzení §13 Bolzanových Paradoxů nekonečna, kde autor tvrdí, že existuje věta pravdivá o sobě. Tím rozumí větu, jejíž pravdivost nezávisí na nějakých dalších okolnostech, které buď již nastaly, nebo teprve nastanou. Příkladem takové věty je "Existuje věta pravdivá o sobě." Kdyby totiž tato věta nebyla pravdivá, byla by pravdivá o sobě její negace, což by ovšem značilo splnění požadavku kladeného v původní větě, tedy její pravdivost. Tato idea tvrzení, jež vypovídají o sobě, nebo relací, které se k sobě vztahují, se ukázala velice plodnou pro řešení mnoha matematických problémů.

Vraťme se však zpět k předmětu našeho zkoumání, výrokovému počtu. Uvědomíme-li si, že dvě formule jsou ekvivalentní, právě když mají stejnou tabulku a dále si připomeneme vlastnosti tabulek $\&$ a $\vee$, dokážeme snadno, že ke každé formuli najdeme ekvivalent (t.j. ekvivalentní formuli) speciálního tvaru. Řekneme že formule je konjunktivní, jestliže je konjunkcí výrokových proměnných nebo jejich negací. Řekneme, že formule je disjunktivně konjunktivní, jestliže je disjunkcí konjunktivních formulí. Analogicky definujeme disjunktivní a konjunktivně disjunktivní formule.

Příklady: 1) formule P a $\neg$P jsou konjunktivní, disjunktivní, disjunktivně konjunktivní i konjunktivně disjunktivní.

2) formule $P\&\neg P$ $(P\vee\neg P)$ je konjunktivní (disjunktivní). Obě formule jsou současně disjunktivně konjunktivní i konjunktivně disjunktivní.

3) formule $(\neg P_1\vee\neg P_2\vee Q)\ \&\ (\neg Q\vee P_1)\ \&\ (\neg Q\vee P_2)$ (vyjadřující $(P_1\&P_2)\equiv Q$) je konjunktivně disjunktivní formule a formule $(P_1\&P_2\&Q)\vee(\neg Q\&\neg P_1)\vee(\neg Q\&\neg P_2)$ (vyjadřující opět $(P_1\&P_2)\equiv Q$) je disjunktivně konjunktivní formule.

Věta o normální formě: Ke každé formuli najdeme disjunktivně konjunktivní formuli, která je s ní ekvivalentní a rovněž k ní najdeme ekvivalentní konjunktivně disjunktivní formuli.

Důkaz: Prohlédneme si tabulku formule. Pokud ve všech řádcích nabývá hodnotu nepravda, je hledanou formulí formule $P\&\neg P$. K řádkům, ve kterých formule nabývá hodnotu pravda, přiřadíme konjunktivní formule tak, že je-li výroková proměnná hodnocena jako pravda, postavíme ji do konjunkce, je-li hodnocena jako nepravda, postavíme do konjunkce její negaci. Všechny takto získané konjunktivní formule dáme do disjunkce a tím získáme hledanou disjunktivně konjunktivní formuli. Při hledání konjunktivně disjunktivního ekvivalentu vycházíme od tabulky negace výchozí formule a podle věty o dualitě zjistíme, že duální formule k nalezenému disjunktivně konjunktivnímu ekvivalentu negace je hledaný konjunktivně disjunktivní ekvivalent.

Právě uvedená věta poskytuje návod na řešení "databázového problému" zmíněného v úvodu. Mnohdy však postup vyhledání disjunktivně konjunktivního ekvivalentu pomocí tabulky je neohrabaný a efektivnější je použití algebraických vlastností logických spojek (asociativního, komutativního a distributivního zákona a de Morganových pravidel). Je to zvláště v případě, že výchozí formule má jednoduchou strukturu a při tom obsahuje hodně výrokových proměnných.

Připomeneme-li výše uvedený třetí příklad, pak při vyhledání disjunktivně konjunktivního ekvivalentu formule $(P_1\&P_2)\equiv Q)$ považujeme postupnou tvorbu ekvivalentů $((P_1\&P_2)\rightarrow Q)\ \&\ (Q\rightarrow(P_1\&P_2))$, $(\neg P_1\vee\neg P_2\vee Q)\ \&\ (\neg Q\vee(P_1\&P_2))$, $(P_1\&P_2\&Q)\vee(\neg Q\&\neg P_1)\vee(\neg Q\&\neg P_2)$ za příjemnější, než vyčíslování tabulky.

V důkazu předešlé věty jsme nijak nevyužili fakt, že tabulka pravdivostních hodnot byla získána jako tabulka některé formule a získáme tak důkaz následující věty.

Věta: Ke každé pravdivostní funkci f (zobrazení z $\{0,1\}^n$ do $\{0,1\}$) lze nalézt formuli výrokového počtu φ (dokonce speciálního tvaru), která má za tabulku uvedenou pravdivostní funkci.

Následující výčet formulí považujeme za velmi užitečný a doporučujeme čtenáři, aby si jeho obsah dobře uvědomil.

Vlastnosti typu uspořádání:

$((\varphi\to\psi)\,\&\,(\psi\to\chi))\to(\varphi\to\chi)$ transitivita spolu s $\varphi\to\varphi$ a s $(((\varphi\to\psi)\,\&\,(\psi\to\varphi)) \to \varphi\equiv\psi)$ nám popisuje, že $\to$ má vlastnosti uspořádání při $\equiv$ chápané jako rovnost. Jestliže použijeme F jako zkratku za nepravdivou formuli (např. $\neg(P\to P)$) a V jako zkratku za pravdivou formuli (např. $P\to P$), pak $F\to\varphi$ a $\varphi\to V$, tedy F je největší a V nejmenší prvek zmíněného uspořádání. V tomto pohledu můžeme jít dále a ukázat, že $\varphi\&\psi$ a $\varphi\vee\psi$ hrají úlohu supréma a infima v naznačeném uspořádání.

Algebraické vlastnosti

$(\varphi\&\varphi)\equiv\varphi$	$(\varphi\vee\varphi)\equiv\varphi$	idempotence
$(\varphi\&\psi)\equiv(\psi\&\varphi)$	$(\varphi\vee\psi)\equiv(\psi\vee\varphi)$	komutativita
$((\varphi\&\psi)\,\&\chi)\equiv(\varphi\&\,(\psi\&\chi))$	$((\varphi\vee\psi)\vee\chi)\equiv(\varphi\vee(\psi\vee\chi))$	asociativita
$(\varphi\vee(\psi\&\chi))\equiv((\varphi\vee\psi)\,\&\,(\varphi\vee\chi))$	$(\varphi\&\,(\psi\vee\chi))\equiv((\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi))$	distr.zák.
$\neg(\varphi\&\psi)\equiv(\neg\varphi\vee\neg\psi)$	$\neg(\varphi\vee\psi)\equiv(\neg\varphi\&\neg\psi)$	de Morgan

Za další užitečné vlastnosti považujeme $(\varphi\to\psi)\equiv(\neg\psi\to\neg\varphi)$, $(\varphi\to\psi)\equiv(\neg\varphi\vee\psi)$ a tedy $\neg(\varphi\to\psi)\equiv(\varphi\&\neg\psi)$. Dále pak $(\varphi_1\to(\varphi_2\to\ldots(\varphi_n\to\psi)\ldots))\equiv((\varphi_1\&\varphi_2\ldots\&\varphi_n)\to\psi)$.

Pro informaci uveďme, že výrokový počet lze postavit na zcela deduktivním základě, sice tak, že některé formule považujeme za axiomy a jiné z nich odvozujeme na základě odvozovacích pravidel.

Nakonec ještě uveďme tři formule, na kterých si čtenář může procvičit prověřování pravdivosti formulí výrokového počtu.

$(\varphi\to\neg\chi)\to(((\varphi\&\psi)\vee\neg\chi)\to(\chi\to\xi))$

$((\varphi\vee\psi)\,\&\chi)\to(\neg(\neg\varphi\to\chi)\to\xi)$

$(\varphi\&\,(\psi\ \to\chi))\to((\psi\&\neg\chi)\to\xi)$

Predikátový počet.

V dalším našem vyšetřování půjdeme hlouběji do struktury matematických výroků. Např. výrok x+5<7 už pro nás nebude základní nedělitelnou jednotkou (výrokovou proměnnou) jejíž pravdivostní hodnota závisí na okolnostech, ale jeho strukturu budeme dále zkoumat. Přitom budeme hlouběji vyšetřovat význam rčení pro každé x (značíme $(\forall x)$) a existuje x (značíme $(\exists x)$) a naučíme se formálnímu způsobu práce s formulemi, které tyto symboly (zvané kvantifikátory) obsahují. Budeme se přitom držet postupu práce použitého při rozvíjení výrokového počtu a rozšiřovat ho.

Začneme nejdříve abecedou, tedy výčtem používaných symbolů.

1) Individuální proměnné: x,y,z,… případně opatřené indexy. Tyto proměnné budou mít za obor proměnnosti individua z konkrétní situace, kterou budeme zkoumat. Mohou to být přirozená čísla, komplexní čísla, matice, množiny, přímky, body, roviny atd.

2) Relační symboly: P_i, R_i, … . Tyto symboly budeme používat pro označování vztahů, které mohou mezi individui nastat. Příkladem může být nerovnost, "být větší než", ale též "být kladný", nebo "ležet mezi dvěma body na přímce". První dva vztahy se týkaly dvojic individuí, třetí pouze jednotlivých individuí a čtvrtý trojic. To "kolikatic" individuí se relační symbol týká nazýváme jeho četností. Přitom se nevyhýbáme ani četnosti 0, jejíž pomocí zahrneme nám již známé výrokové proměnné do predikátového počtu.

3) Funkční symboly: F_i, G_i, … . Tyto symboly budeme používat pro označování funkčních závislostí, kdy j-ticím individuí odpovídají individua, i opět označuje index. Příklady mohou být x+y, x•y. Uvedené příklady jsou binární funkce. Při tom se nevyhýbáme ani četnosti 0, což jsou konstanty, označující většinou individua speciálního postavení, např. 0, 1, π.

4) Logické spojky.

5) Kvantifikátory $(\forall x)$, $(\exists x)$ mající význam pro každé x, respektive existuje x.

6) Pomocné symboly: (,).

Jazyk použitý pro tu kterou oblast matematického zkoumání specifikují použité funkční a relační symboly. Proto se též tyto symboly nazývají vlastní symboly jazyka. Ostatní symboly jsou společné pro všechny oblasti a nazývají se (kromě pomocných) logické symboly.

Příklady konkrétních abeced jsou: Pro teorii grup $\bullet, ^{-1}, 1, =$. (Binární funkční symbol, unární, 0-ární funkční symbol, binární relační symbol.) Pro teorii uspořádání < ,=. Pro teorii množin $\in$,=. Pro přirozená čísla 0, S, +, • , =, <.

Kromě formulí je ještě další druh smysluplných slov, které nazýváme termy. Jsou to "termíny", kterými se na individua zkoumané situace obracíme. Term odpovídá např. aritmetickým výrazům, které se používají v programovacích jazycích. Je to vlastně popis operací, kterými bychom získali hodnotu termu, tedy individuum (číslo, matici atd.), jsou-li dány hodnoty všech proměnných, které se v termu vyskytují. Příklady termů jsou $(2+3)\bullet 5$, $x \bullet z^{-1}$.

Podáme nyní induktivní definici termu.

Definice: 1) Individuální proměnné jsou termy.

2) Když F_i je funkční symbol četnosti j a $\tau_1, \dots ,\tau_j$ jsou termy, pak slovo $F_i(\tau_1, \dots ,\tau_j)$ je term.

3) Každý term vznikne z individuálních proměnných konečným počtem aplikací pravidla 2).

Úkol: Ukažte, že (0+1)•(1+1) je term. Přitom používáme běžného značení x+y místo +(x,y) uváděného v definici. Ukažte, že 1)1 není term.

Čtenáři nebude činit potíže dokázat větu: Jestliže $t(x_1, \dots ,x_n)$ je term, ve kterém se vyskytují individuální proměnné $x_1, \dots ,x_n$ a $\tau_1, \dots ,\tau_n$ jsou termy, pak slovo, ve kterém jsou některé výskyty x_i nahrazeny slovem τ_i je opět term.

Nyní můžeme přistoupit k definici formule. Přitom postupujeme opět induktivně.

Definice: 1) Je-li R_i j-četný relační symbol a $\tau_1, \dots ,\tau_j$ jsou termy, pak $R_i(\tau_1, \dots ,\tau_j)$ je formule (kterou nazýváme atomární).

2) Jsou-li φ,ψ formule, pak $\neg\varphi$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi\equiv\psi)$ jsou formule.

3) Je-li φ formule, pak $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ jsou formule. φ se nazývá rozsah příslušného kvantifikátoru.

4) Všechny formule vzniknou z atomárních konečnou aplikací pravidel 2), 3).

Nyní se opět vrátíme k matematizaci pravdy, již v poněkud komplikovanější situaci. Nejdříve však musíme zavést pojem matematické struktury (prvního řádu) v jejímž rámci budeme pravdivost formulí zavádět. (Jiné formule jsou pravdivé v rámci čísel přirozených, jiné v rámci čísel komplexních.)

Definice: Matematickou strukturou (prvního řádu) $\mathcal{M}$ rozumíme neprázdnou množinu M (množinu individuí) a množinu funkcí definovaných na M a relací na této množině individuí.

Příklady struktur jsou přirozená čísla s funkcemi +,•,0,1 a relací =, libovolná konkrétní grupa, přirozená čísla s relacemi <, =.

V definici struktury jsme již úmyslně Použili slova množina, čímž chceme upozornit na to, že se nám bude převážně jednat o struktury, které mají nekonečně mnoho individuí a pro manipulaci s nimi již potřebujeme nějakou formu teorie množin (třeba intuitivní).

Pravdivost formulí může nyní záviset jak na tom, v jaké struktuře ji chápeme, tak na tom, jaká konkrétní individua za individuální proměnné dosadíme.

Realizací jazyka ve struktuře rozumíme přiřazení, které jednotlivým funkčním symbolům a relačním symbolům jazyka přiřazuje funkce a relace na struktuře tak, že četnosti souhlasí. (Realizace přiřazuje 0-četným relacím hodnotu pravda, nebo nepravda a takto je zde zahrnuto ohodnocení výrokových proměnných zkoumané ve výrokovém počtu.) Instruktivní může být realizace grupového • jako + v celých číslech.

Ohodnocením individuálních proměnných e v struktuře $\mathcal{M}$ rozumíme zobrazení, které individuálním proměnným přiřazuje individua struktury $\mathcal{M}$.

Induktivním způsobem budeme nyní definovat hodnoty termů a formulí při ohodnocení v dané struktuře (realizace funkčních a relačních symbolů se přitom považuje za pevnou, předem určenou).

Definice: Hodnota termu τ při ohodnocení e (značíme $\tau[e]$) je definována následujícím induktivním způsobem.

1) Je-li τ individuální proměnná x, pak $\tau[e]=e(x)$.

2) $F_i(\tau_1, \ldots ,\tau_j)[e]=f_i(\tau_1[e], \ldots ,\tau_j[e])$, kde f_i je realizace F_i ve struktuře a j je příslušná četnost.

Pro označení slova, které vznikne ze slova φ nahrazením všech podslov $\varphi_1, \ldots ,\varphi_k$ slovy $\psi_1, \ldots ,\psi_k$, budeme používat značení $\varphi\ (\varphi_1/\psi_1, \ldots ,\varphi_k/\psi_k)$. Převážně budeme substituci používat v případě, že slova $\varphi_1, \ldots ,\varphi_k$ jsou individuální proměnné. Bude-li z kontextu jasné, jak substituce probíhá, použijeme běžného matematického značení (např. $F_i(C_1, \ldots ,C_k)$ místo $F_i(x_1/C_1, \ldots ,x_k/C_k)$). Bude-li jasné, o které proměnné se při substituci jedná, použijeme též značení $t(x_i/\tau_i)$, což bude značit, že všechny proměnné $x_1, \ldots ,x_k$ nahradíme $\tau_1, \ldots ,\tau_k$ a nikoliv že jedinou proměnnou x_i nahradíme τ_i. Uvedený způsob značení budeme používat i později, kdy v případě formulí některé substituce zakážeme (v případě substituce 5 za x ve formuli $x=5\vee(\exists x)(x<7)$ získané slovo $5=5\vee(\exists 5)(5<7)$ asi nevystihuje to, co jsme měli substitucí na mysli). Jiným příkladem nabádajícím k opatrnosti je $(\exists y)(x=y)(x/y+1)$.

V souladu se zavedeným značením použijeme též $e(x_i/m_i)$ pro označení ohodnocení, které vznikne z ohodnocení e tak, že proměnné $x_1, \ldots ,x_j$ hodnotíme individui $m_1, \ldots ,m_j$. Indukcí podle složitosti můžeme dokázat následující větu o substituci.

Věta: Nechť $t_1, \ldots ,t_j$ jsou termy, nechť $m_i = t_i[e]$. Nechť τ je term, pak $\tau(x_i/t_i)[e] = \tau[e(x_i/m_i)]$. Přitom $\tau(x_i/t_i)$ je term, který vznikne z τ substitucí termů t_i za proměnné x_i a $e(x_i/m_i)$ označuje ohodnocení, které vznikne z e tak, že proměnným x_i přiřazuje individua m_i.

Podejme dále definici pravdivostní hodnoty formule při ohodnocení. Přitom 0 používáme pro hodnotu nepravda a 1 pro hodnotu pravda.

Definice: 1) Je-li φ atomární formule, tedy φ je $R_i(\tau_1, \dots ,\tau_j)$, kde j je četnost R_i, pak $\varphi[e]=1$ jestliže $\langle\tau_1[e], \dots ,\tau_j[e]\rangle \in r_i$, tedy, když individua přiřazená termům τ_i splňují relaci r_i realizující relační symbol R_i.

2) Při indukčním kroku pro logické spojky se řídíme tabulkami logických spojek. Např. $(\varphi\vee\psi)[e]=1$, jestliže $\varphi[e]=1$, nebo $\psi[e]=1$.

3) Je-li φ formule tvaru $(\exists x)\psi$, pak $(\exists x)\psi[e]=1$ právě tehdy, když existuje individuum m takové, že $\psi[e(x/m)]=1$. Je-li φ formule tvaru $(\forall x)\psi$, pak $(\forall x)\psi[e]=1$ právě tehdy, když pro každé individuum m příslušné struktury platí $\psi[e(x/m)]=1$. V obou případech nezávisí hodnota formule na tom, jak je hodnocena proměnná x.

Nyní musíme upozornit na nebezpečí vznikající z použitého formalizmu při substituci do formulí, které obvykle čtenáři nehrozí při intuitivní práci s konkrétními matematickými formulemi. Kromě dříve uvedeného příkladu možnosti vzniku nesmyslného slova, může být při neopatrném postupu pozměněn smysl, který substitucí obvykle míníme. Následující příklad je varováním.

Považujeme-li formuli $(\forall x)\varphi$ za pravdivou, pak považujeme za pravdivou též formuli takovou, že v φ místo x substituujeme libovolný term. Formuli $(\forall x)(\exists y)(x=y)$ obvykle považujeme za pravdivou, což se již nedá říci o formuli $(\exists y)(y+1=y)$, která vznikla z formule $(\exists y)(x=y)$ nahrazením písmene x termem y+1. Podstata je v tom, že proměnná y vyskytující se v termu y+1 je vázána kvantifikátorem $(\exists y)$ ve formuli, kam dosazujeme.

Definujme nyní, co jsou volné a vázané výskyty proměnných ve formuli.

Definice: 1) Všechny výskyty individuálních proměnných v atomárních formulích jsou volné.

2) Všechny výskyty ve formuli vzniklé spojením logickou spojkou jsou volné (resp. vázané), pokud byly volné (resp. vázané) v původních formulích.

3) Ve formuli $(\forall x)\varphi$ (resp. $(\exists x)\varphi$) se všechny výskyty x, které byly v φ volné, stávají vázanými, stejně tak považujeme za vázaný výskyt proměnné x bezprostředně za znakem kvantifikace. Ostatní výskyty proměnných jsou volné (resp. vázané) pokud byly volné (resp. vázané) ve formuli φ.

Nyní můžeme indukcí podle složitosti prověřit následující větu.

Věta: Nechť φ je formule, nahradíme-li některé volné výskyty proměnné x ve slově φ termem τ, pak vzniklé slovo je opět formule.

Úkol: Prověřte uvedenou větu.

Nadále při substituci termu ve formuli φ za proměnnou x vždy substituujeme za všechny volné výskyty této proměnné. Tomu se podřizuje i přijaté značení. Tedy např. $\varphi(x/\tau)$ neoznačuje slovo, ve kterém jsme za všechny výskyty x substituovali τ, ale formuli, která vznikla tak, že jsme ve slově φ substituovali τ za všechny volné výskyty x a vázané výskyty jsme nezměnili.

Definice: Formule se nazývá otevřená, jestliže žádná proměnná v ní nemá vázaný výskyt. (Nevyskytuje se v ní tedy znak kvantifikace.) Formule se nazývá uzavřená, jestliže nemá žádný volný výskyt nějaké své proměnné. Formule se nazývá obojetná, je-li jak uzavřená, tak i otevřená.

Úkol: Uveďte Příklad obojetné formule (která není Prázdným slovem).

Poznamenejme, že **pravdivost uzavřených formulí ve struktuře nezávisí na ohodnocení.**

Zavedená substituce termu do formule zabraňuje vzniku nesmyslných slov, nezabraňuje však "Pozměnění smyslu" formule. To nás vede k další definici.

Definice: Řekneme, že term τ je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, jestliže se žádný volný výskyt x v φ nevyskytuje v rozsahu žádného kvantifikátoru vážícího proměnnou z termu τ.

Speciálně, pokud τ je konstantní term (neobsahující žádné proměnné), je jistě substituovatelný. Proměnná sama je jakožto term rovněž substituovatelná za sebe. Když formule neobsahuje žádný kvantifikátor (je to otevřená formule), pak každý term je substituovatelný za každou proměnnou. Substituujeme-li term za proměnnou, provádíme to jen za volné výskyty a je-li term substituovatelný. Potřebujeme-li substituovat term a brání nám podmínka substituovatelnosti, pomůžeme si přejmenováním vázaných proměnných.

Následující věta není pro porozumění dalšímu textu podstatná, ale její důkaz čtenáři podmínku substituovatelnosti termu dále osvětlí.

Věta: Nechť $t_1, \ldots, t_j$ jsou termy. Označme $m_i=t_i[e]$. Pak $\varphi(x_i/t_i)[e]=\varphi[e(x_i/m_i)]$. Přitom pochopitelně předpokládáme, že t_i jsou substituovatelné za x_i.

Důkaz: Důkaz se provádí indukcí podle složitosti formule a my zde provedeme pouze podstatný indukční krok pro $(\exists x)\psi$, kde x není v seznamu x_i. Indukční krok pro $(\forall x)$ je analogický a pokud x je některou x_i, pak ve formuli $(\exists x_i)\psi$ žádnou substituci za x_i neprovádíme, neboť substituujeme pouze za volné výskyty. Podle definice $(\exists x)\psi(x_i/t_i)[e]=1$, právě když existuje m tak, že $\psi(x_i/t_i)[e(x/m)]=1$. To je podle indukčního předpokladu právě tehdy, když $\psi[e(x/m,x_i/\mathfrak{m}_i)]=1$, kde $\mathfrak{m}_i=t_i[e(x/m)]$. Z podmínky substituovatelnosti termu však dostáváme $\mathfrak{m}_i=m_i$, neboť v t_i se nesmí x vyskytovat. Podle definice splňování je to právě tehdy, když $(\exists x)\psi[e(x/m)]=1$.

Definice: 1) Řekneme, že formule φ je (při dané realizaci) ve struktuře $\mathcal{M}$ pravdivá, jestliže je pravdivá při každém ohodnocení. Tuto skutečnost značíme $\mathcal{M}\models \varphi$.

2) Řekneme, že systém formulí A je pravdivý v $\mathcal{M}$, nebo, že $\mathcal{M}$ je modelem A, jestliže každá formule systému je pravdivá. Tuto skutečnost značíme $\mathcal{M}\models A$.

3) Řekneme, že systém formulí je splnitelný, jestliže existuje struktura, která je jeho modelem.

Prověření, že nějaká formule je ve struktuře pravdivá pro nekonečné struktury již nemusí být nijak snadné. Většinou se přitom odvoláváme na to, jak byla struktura vybudována a uvedený fakt prověřujeme např. důkazem v teorii množin.

Obraťme se nyní k dedukci v naší nové, již komplikovanější situaci.

Definice: Řekneme, že systém formulí B je (tautologicky) odvoditelný ze systému formulí A (značíme $A\models B$), jestliže pro každou strukturu $\mathcal{M}$ a realizaci funkčních a relačních symbolů z A,B v $\mathcal{M}$ platí: když $\mathcal{M}\models A$, pak $\mathcal{M}\models B$. Speciálně $\models A$ označuje, že systém formulí A je pravdivý v libovolné struktuře. (Je pravdivý zcela obecně.) Formule, které jsou pravdivé obecně, nazýváme tautologie.

Čtenář si snadno uvědomí, že opět platí základní vlastnosti $\models$: 1) $A\subseteq B$, pak $B\models A$.

2) $A\models B$ a $B\models C$, pak $A\models C$.

3) $A|=B$ a $A|=C$, pak $A|=B\cup C$.

Přitom uvedené zákony již mají "striktně konečný charakter práce se symboly" a jejich i několikanásobné použití lze snadno evidovat.

Pravdivost uzavřených formulí závisí pouze na volbě struktury a realizace, nezávisí již na volbě ohodnocení individuálních proměnných. Proto na ně můžeme používat všechny obecné zákony dedukce zkoumané ve výrokovém počtu. Každá realizace dává totiž ohodnocení uzavřených podformulí jakožto výrokových proměnných ve výrokovém počtu a pouze se může stát, že některá ohodnocení pravdou nebo nepravdou nemohou nastat vzhledem ke strukturální stavbě podformulí. Speciálně při omezení na uzavřené formule platí věta o dedukci, věta o důkazu sporem, věta o rozboru případů, jakož i věty vážící se ke spojce $\&$.

Úkol: Prověřte platnost výše zmíněných vět i v predikátovém počtu při omezení na uzavřené formule.

Dále se budeme zabývat výzkumem symbolu |= bez omezení se na uzavřené formule.

Velmi často používáme následující větu.

Věta (o tautologiích): Je-li φ tautologie výrokového počtu a za výrokové proměnné dosadíme formule predikátového počtu, získáme tautologii predikátového počtu.

Nadále zůstává v platnosti pravidlo odloučení $\varphi, \varphi\to\psi|=\psi$.

Navíc získáváme pravidlo $\varphi|=(\forall x)\varphi|=\varphi$ vzhledem k tomu, že jsme definovali pravdivost formule ve struktuře jako její pravdivost při libovolném ohodnocení individuálních proměnných. Obecně však již neplatí $|=\varphi\to(\forall x)\varphi$. (Příklad: $x=1\to(\forall x)(x=1)$ není splněna v přirozených číslech při ohodnocení x individuem 1.) V predikátovém počtu je již potřeba velmi pečlivě rozlišovat $\to$ a |=.

Jako příklad použití dokážeme, že $|=(\forall x)(\forall y)\varphi\to(\forall y)(\forall x)\varphi$ za předpokladu, že $(\forall x)(\forall y)\varphi$ je uzavřená formule. Za tohoto předpokladu můžeme použít věty o dedukci a stačí proto odvodit $(\forall x)(\forall y)\varphi|=(\forall y)\varphi|=\varphi|=(\forall x)\varphi|=(\forall y)(\forall x)\varphi$. Poněkud komplikovanější formulí, kterou si můžeme prověřit je následující distributivní zákon.

$|=(\forall x)(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to(\forall x)\psi)$ za předpokladu, že φ i $(\forall x)\psi$ jsou uzavřené formule. Opět můžeme použít věty o dedukci a odvozovat následovně: $(\forall x)(\varphi\to\psi),\varphi|=\varphi,\varphi\to\psi|=\psi|=(\forall x)\psi$. Také obráceně platí $|=(\varphi\to(\forall x)\psi)\to(\forall x)(\varphi\to\psi)$, za stejného předpokladu.

To, co jsme si dokázali o substituci termů za proměnné při ohodnocení formulí, nám umožňuje ověřit další užitečnou vlastnost $(\forall x)\varphi|=\varphi(x/\tau)$ pokud τ je substituovatelný za x v φ a také duálně $\varphi(x/\tau)|=(\exists x)\varphi$ za stejného předpokladu substituovatelnosti. Tato pravidla vyjadřují naše chápání toho, že platí-li nějaká vlastnost pro každé x, platí též pro libovolný konkrétní objekt a platí-li nějaká vlastnost pro konkrétní objekt, pak existuje x takové, že pro něj vlastnost platí.

Speciálně nám toto pravidlo umožňuje při dedukcích přejmenovávat kvantifikované proměnné. Sice $(\forall x)\varphi|=(\forall z)\varphi(x/z)$ pokud individuální proměnná z je substituovatelná (např., když se v φ vůbec nevyskytuje). Čtenář již asi pociťuje nepříjemnost omezení věty o dedukci na uzavřené formule. Následující věta tuto nepříjemnost odstraňuje. Nejdříve si tvrzení věty přibližme úvahou, kterou v matematice běžně provádíme. Chceme-li dokázat, že nějaké tvrzení (např. tvaru implikace) platí pro každé x, Provádíme běžně následující obrat. Řekneme: Zvolme toto x pevně, ale libovolně. Pokračujeme v důkazu a na konci prohlásíme: Protože jsme zvolili x libovolné, platí tvrzení pro všechna x. Analyzujme uvedený obrat z našeho pohledu logického kalkulu. To, že jsme zvolili x pevné, znamená, že jsme se přestali na x dívat jako na proměnnou, ale dále se na x díváme jako na konstantu. To, že x volíme libovolně znamená, že konstantu x nijak nespecifikujeme nějakým novým axiomem (např. nepožadujeme, aby to byl levý inverzní prvek). To, že jsme zůstali u označení x znamená, že konstanta x je mimo seznam již používaných konstant (např. π,e, ...). Po uvedeném přiblížení již bude tvrzení následující věty čtenáři naprosto pochopitelné.

Věta o konstantách: Nechť C_1, ... ,C_n jsou konstanty, které se nevyskytují v systému formulí *A* ani ve formuli φ. Nechť $A|=\varphi\,(x_i/C_i)$, pak $A|=\varphi$.

Důkaz: Nechť $\mathcal{M}|= A$. Máme dokázat, že $\mathcal{M}|=\varphi$, t.j. že pro každé ohodnocení individuálních proměnných platí $\varphi[e]=1$. Nechť e je libovolné ohodnocení. Nechť m_i jsou individua taková, že $m_i=x_i[e]$. Nechť $\mathcal{K}$ je struktura, která vznikne z $\mathcal{M}$ přidáním nových konstant, které označují individua m_i (dovolíme si je značit stejně). Realizujme konstanty C_i konstantami m_i. Vzhledem k tomu, že C_i se nevyskytují v *A*, platí $\mathcal{K}|=A$, a proto podle předpokladu věty $\mathcal{K}|=\varphi$. Odtud však již plyne (např. podle věty o substituci v ohodnocení) $\varphi[e]=1$v $\mathcal{M}$.

Technické použití uvedené věty je jasné. Volné výskyty proměnných, které nám brání v použití věty o dedukci a ostatních vět známých z výrokového počtu si označíme konstantami a na konci odvozování opět místo konstant napíšeme původní volné výskyty proměnných.

Jako příklad odvoďme $|=(\forall x)(\varphi(x,y)\&\psi(x,z))\rightarrow((\forall x)\varphi(x,y)\&(\forall x)\psi(x,z))$, kde φ i ψ mohou obsahovat i jiné další volné proměnné. Nejdříve označme volné proměnné pomocí konstant (např. y označme C a z označme D) a pak postupujme následovně $(\forall x)(\varphi(x,C)\&\psi(x,D))|=\varphi(x,C)\&\psi(x,D)|=\varphi(x,C),\psi(x,D)|=(\forall x)\varphi(x,C),(\forall x)\psi(x,D)$ $|=(\forall x)\varphi(x,C)\&(\forall x)\psi(x,D)$. Čtenář ať si prozkouší, proč nelze obdobně postupovat pro důkaz (neplatného tvrzení) $(\forall x)(\varphi(x)\vee\psi(x))\rightarrow((\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\psi(x))$.

Dále je vhodné se vrátit zpět a uvědomit si, že $|=(\forall x)(\forall y)\varphi\rightarrow(\forall y)(\forall x)\varphi$ zcela obecně, $|=(\forall x)(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow(\forall x)\psi)$ za jediného omezujícího předpokladu, že v φ se x nevyskytuje volně a $\varphi|=\varphi(x/\tau)$ můžeme reformulovat do $|=(\forall x)\varphi\rightarrow\varphi(x/\tau)$ za omezení, že τ je substituovatelný v φ za x.

Poslední technickou větu o |=, která nás očekává přibližme následující matematickou úvahou. Při nějakém matematickém důkazu dospějeme k tvrzení $(\exists x)\varphi$. Pak prohlásíme: Zvolme pevně jedno takové x, jehož existenci jsme dokázali. Postupujeme dále v důkazu a dokážeme $\psi(x)$. Z toho uzavřeme $(\exists x)\psi(x)$.

Věta o zavedení konstant: Nechť $A|=(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, přitom nechť φ již žádné jiné volné proměnné než x_1, ... ,x_n neobsahuje. Nechť C_1, ... ,C_n jsou konstanty, které se nevyskytují ani v *A*, ani v φ . Pokud $A,\varphi(C_1,\ldots,C_n)|=\psi$ a ψ neobsahuje C_1, ... C_n, pak $A|=\psi$.

Důkaz: Máme dokázat, že pro každou strukturu $\mathcal{M}$ platí, že když $\mathcal{M}|=A$, pak $\mathcal{M}|=\psi$. Tedy pro každé ohodnocení e je $\psi[e]=1$. Nechť m_1, ... ,m_n jsou individua taková, že $\varphi[e(x_i/m_i)]=1$. Tato individua musí existovat podle předpokladu $\mathcal{M}|=(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\varphi$. Přitom je můžeme pevně stanovit (nezávisle na ohodnocení), neboť naposledy uvedená formule je uzavřená. Pak struktura $\mathcal{K}$, která vznikne z $\mathcal{M}$ přidáním konstant m_1, ... ,m_n (opět si dovolujeme licenci stejného označení konstant nové struktury a individuí) při realizaci C_1, ... ,C_n je modelem A,$\varphi(C_1, ... ,C_n)$, a proto je též modelem ψ podle předpokladu. Protože ψ neobsahuje C_1, ... ,C_n, plyne odtud, že i $\mathcal{M}|=\psi$.

Tuto větu použijeme k prověření $|=(\exists x)(\forall y)\varphi\rightarrow(\forall y)(\exists x)\varphi$. Dedukce bude vypadat následovně: Vycházíme od $(\exists x)(\forall y)\varphi$. Věta o zavedení konstant dává $(\forall y)\varphi(x/C)|=\varphi(x/C)|=(\exists x)\varphi|=(\forall y)(\exists x)\varphi$. Přitom poslední formule neobsahuje C, a proto je odvoditelná již z původní formule podle věty o zavedení konstant. Důkaz zakončíme použitím věty o dedukci při případném označení volných proměnných konstantami.

Další užitečné vlastnosti jsou následující distributivní zákony.

$\varphi\rightarrow\psi|=(\forall x)\varphi\rightarrow(\forall x)\psi$, $(\exists x)\varphi\rightarrow(\exists x)\psi$.

Prověřme druhou implikaci. Máme prověřit $\varphi\rightarrow\psi,(\exists x)\varphi|=(\exists x)\psi$. Za využití věty o zavedení konstant můžeme přidat nový axiom $\varphi(x/C)$, dále substitucí $\varphi(x/C)\rightarrow\psi(x/C)$, odtud $\psi(x/C)$ a tedy $(\exists x)\psi$. Přitom poslední formule již neobsahuje C, a proto je již odvoditelná z původních dvou předpokladů.

Dalším příkladem použití věty o zavedení konstant je důkaz
$|=(\exists x)(\varphi\vee\psi)\rightarrow((\exists x)\varphi\vee(\exists x)\psi)$.

Máme prověřit $(\exists x)(\varphi\vee\psi)|=(\exists x)\varphi\vee(\exists x)\psi$. Věta o zavedení konstant problém převádí na $\varphi(x/C)\vee\psi(x/C)|=(\exists x)\varphi\vee(\exists x)\psi$. Přitom podle věty o konstantách můžeme považovat všechny vyskytující se formule za uzavřené a tudíž můžeme použít větu o rozboru případů. Máme $\varphi(x/C)|=(\exists x)\varphi|=(\exists x)\varphi\vee(\exists x)\psi$ a podobně $\psi(x/C)|= (\exists x)\psi|= (\exists x)\varphi\vee(\exists x)\psi$, tedy $\varphi(x/C)\vee\psi(x/C)|=(\exists x)\varphi\vee(\exists x)\psi$, což je požadovaný fakt pro použití věty o zavedení konstant.

Z uvedených příkladů již jasně vyplývá strategie odvozování formulí s kvantifikátory. Snažíme se rozdělit složité formule na jednodušší podformule. U logických spojek přitom používáme vět známých z výrokového počtu a pomáháme si větou o konstantách. Pro odstranění obecných kvantifikátorů používáme $(\forall x)\varphi|=\varphi|=(\forall x)\varphi$ a pro odstranění existenčních kvantifikátorů používáme větu o zavedení konstant.

Na rozdíl od výrokového počtu, kdy alespoň pro krátké formule s málo proměnnými máme možnost použít tabulky pro rozhodnutí, zda zkoumaná formule je pravdivá, zde již takovou možnost nemáme a nemáme ji dokonce podstatně. Při hlubším studiu matematické logiky se ukáže, že neexistuje rozhodovací algoritmus, který by zcela mechanicky, pouze na základě struktury formule, rozhodl, zda je pravdivá, nebo ne.

Vrátíme-li se k dualitě známé z výrokového počtu, uveďme zde, že symboly $(\forall x)$ a $(\exists x)$ jsou duální. To nám umožňuje použít větu o dualitě při dokazování sporem i v logice s kvantifikátory.

Nakonec ještě uveďme, že podobně jako ve výrokovém počtu můžeme ke každé formuli najít ekvivalent ve standardním tvaru (věta o disjunktivně konjunktivní normální formě), můžeme i v případě predikátového počtu vždy najít ekvivalent jistého typického tvaru. Opět to však neznamená, že by tento ekvivalent byl srozumitelnější, může však být užitečný při strojovém zpracování, nebo z různých teoretických důvodů. Nejdříve podáme definici.

Definice: O formuli říkáme, že je v prenexním tvaru, jestliže jsou na začátku uvedeny kvantifikátory vážící různé proměnné a ty jsou následovány otevřenou formulí. První části se říká prefix a druhé části matrice příslušné formule.

Věta: Ke každé formuli φ lze nalézt formuli ψ v prenexním tvaru tak, že $\models\varphi\equiv\psi$.

Důkaz se provede indukcí podle složitosti formule za použití tvrzení:

$\models(\varphi\rightarrow(\forall x)\psi)\equiv(\forall x)(\varphi\rightarrow\psi)$, $\models(\varphi\rightarrow(\exists x)\psi)\equiv(\exists x)(\varphi\rightarrow\psi)$, $\models((\forall x)\psi\rightarrow\varphi)\equiv(\exists x)(\psi\rightarrow\varphi)$,
$\models((\exists x)\psi\rightarrow\varphi)\equiv(\forall x)(\psi\rightarrow\varphi)$, $\models\neg(\forall x)\psi\equiv(\exists x)\neg\psi$, $\models\neg(\exists x)\psi\equiv(\forall x)\neg\psi$,
$\models((\forall x)\psi\&\varphi)\equiv(\forall x)(\psi\&\varphi)$, $\models((\exists x)\psi\&\varphi)\equiv(\exists x)(\psi\&\varphi)$, $\models((\forall x)\psi\vee\varphi)\equiv(\forall x)(\psi\vee\varphi)$,
$\models((\exists x)\psi\vee\varphi)\equiv(\exists x)(\psi\vee\varphi)$, $\models\varphi\equiv(\forall x)\varphi$, $\varphi\equiv(\exists x)\varphi$,
vše za předpokladu, že x se nevyskytuje v φ volně. Dále ještě použijeme $\models(\varphi\equiv\psi)\equiv((\varphi\rightarrow\psi)\&(\psi\rightarrow\varphi))$.

Uvedená tvrzení již přenecháváme čtenáři, který má pro jejich prověření již dostatečně vybudovaný aparát. Při převádění na prenexní tvar je též někdy potřeba přejmenovat vázané proměnné.

K predikátovému počtu se běžně přistupuje axiomaticky. Přitom je axiomatický přístup mnohem důležitější, než v případě výrokového počtu, neboť fakt, že tvrzení je odvoditelné v rámci axiomatického systému je "finitně prověřitelný", což se o pravdivosti formule nedá tvrdit ani v rámci jedné nekonečné struktury.

Axiomatickým zpracováním výrokové a predikátové logiky se v našem úvodním textu nezabýváme. Zájemce odkazujeme na pokročilejší přednášky a literaturu.

Uveďme nakonec ještě soupis užitečných formulí:

Komutativita kvantifikátorů stejného druhu.

$\models(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y)\rightarrow(\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)$, $\models(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y)\rightarrow(\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)$.

Poznamenejme, že asociativita kvantifikátorů nemá smysl, neboť "závorkování" je přesně určeno stavbou formule.

Distributivní zákony.

$\models(\forall x)(\varphi(x)\rightarrow\psi(x))\rightarrow((\forall x)\varphi(x)\rightarrow(\forall x)\psi(x))$,$\models(\forall x)(\varphi(x)\rightarrow\psi(x))\rightarrow((\exists x)\varphi(x)\rightarrow(\exists x)\psi(x))$.

Poznamenejme, že pokud některá z formulí φ,ψ neobsahuje x volně, je možné příslušný kvantifikátor vypustit a v některých případech platí i obrácená implikace (viz prenexní operace). Dále poznamenejme, že formule platí i v případě, že na obou stranách implikací použijeme spojku ekvivalence ($\equiv$).

Pozor formule $(\exists x)(\varphi(x)\rightarrow\psi(x))\rightarrow((\exists x)\varphi(x)\rightarrow(\exists x)\psi(x))$ **neplatí**.

Další distributivní zákony.

$\models(\forall x)(\varphi(x)\&\psi(x))\equiv((\forall x)\varphi(x)\&(\forall x)\psi(x))$, $\models(\exists x)(\varphi(x)\vee\psi(x))\equiv((\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\psi(x))$.

Pro duální spojky platí jen jedna implikace. Sice
$\models(\exists x)(\varphi(x)\&\psi(x))\rightarrow((\exists x)\varphi(x)\&(\exists x)\psi(x))$ a $\models((\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\psi(x))\rightarrow(\forall x)(\varphi(x)\vee\psi(x))$.

Obrácené implikace obecně neplatí. Dále platí $\models(\forall x)\varphi(x)\rightarrow(\exists x)\varphi(x)$ a $\models(\exists x)(\forall y)\varphi(x,y)\rightarrow(\forall y)(\exists x)\varphi(x,y)$, ale obecně né obráceně. Např. v následujícím případě však platí dokonce ekvivalence.

$\models$ $(\exists x)(\forall y)(\varphi(x)\rightarrow\psi(y))\equiv(\forall y)(\exists x)(\varphi(x)\rightarrow\psi(y))$ (Ekvivalenci zjistíte použitím prenexních operací.) Prenexní operace byly v jednom celku uvedeny dříve a proto je zde neuvádíme.

Dále upozorňujeme na $\varphi(x)\models(\forall x)\varphi(x)$, ale neplatí $\models\varphi(x)\rightarrow(\forall x)\varphi(x)$. Speciálně platí $\varphi(x)\rightarrow\psi(x)\models(\forall x)\varphi(x)\rightarrow(\forall x)\psi(x)$, ale neplatí $\models(\varphi(x)\rightarrow\psi(x))\rightarrow((\forall x)\varphi(x)\rightarrow(\forall x)\psi(x))$.

Pro vyhledání protipříkladů ve všech shora uvedených příkladech postačuje dvouprvkový model, nebo sudá a lichá čísla.

Důležitým úkolem, se kterým se při práci s kvantifikátory setkáváme, je nutnost "přejmenovat" proměnné ve vázaných výskytech. Při tom si musíme počínat opatrně, abychom nezměnili smysl formule. Určitě neuděláme chybu, když zvolíme pro přejmenování proměnné, které se ve formuli nevyskytují. Formule, které se liší pouze přejmenováním vázaných proměnných se nazývají varianty. To, že jsou dvě formule varianty poznáme např. tak, že najdeme proměnné, které se nevyskytují ani v jedné z nich, a po vhodném přejmenování vázaných výskytů získáme tutéž formuli, ve které bude navíc každá proměnná kvantifikována nejvýše jednou a žádná proměnná nebude mít současně volný i vázaný výskyt.

Pro úplnost dodejme přesnou definici toho, že dvě formule jsou varianty.

Definice: Formule $(\forall x)\varphi(x)$ a $(\forall y)\varphi(x/y)$ ($(\exists x)\varphi(x)$ a $(\exists y)\varphi(x/y)$) jsou bezprostřední varianty, jestliže se y nevyskytuje v φ volně a je v φ za x substituovatelné. Dvě formule jsou varianty jestliže jedna vznikne z druhé konečnou posloupností záměn, ve kterých zaměňujeme vždy některou podformuli bezprostřední variantou.

Neuvádíme již další formule k procvičení, neboť se domníváme, že postačuje, když si čtenář prověří platnost výše uvedených formulí.

Axiomatický způsob práce.

Doposud jsme náš deduktivní logický kalkulus zdůvodňovali zpracovaným pojmem pravdivosti formulí. Zvláště v případě vyšetřování nekonečných struktur jsou základy našich dedukcí poměrně snadno napadnutelné. Proto se často používá axiomatický přístup, kdy se stanoví základní tvrzení (zvané axiomy) a dedukční pravidla, tedy způsob, jak odvozovat z tvrzení další tvrzení. Za dokázané (a tudíž pravdivé) se považují ta tvrzení, která lze odvodit z axiomů postupným používáním dedukčních pravidel. Úvahy, užívající popis pravdivosti, ve kterých umíme argumentovat pouze slovy "tak situaci rozumíme", jsou přesunuty na samý počátek, kdy axiomatický systém stanovujeme. Z našeho dřívějšího pohledu je axiomatický způsob získávání pravdivých tvrzení korektní, pokud prověříme, že axiomy jsou pravdivá tvrzení, a že dedukční pravidla přenášejí pravdivost. Požadavek prověření pravdivosti tvrzení důkazem je v matematice již dlouho a snad stojí u zrodu matematiky. Poprvé byl uplatněn v Euklidových Elementech a je sporné, zda dřívější, platonské pojetí geometrie se má již považovat za matematiku, nebo ne.

V uvedených dvou příkladech axiomatizace (logického kalkulu a geometrie) je snaha axiomaticky co nejpřesněji vyjádřit zkoumanou situaci, t.j. snažit se, aby ve všech možných světech vyhovujících axiomatice platilo totéž. Axiomatiku s touto snahou nazýváme klasickou.

Kromě toho si matematici povšimli i druhého rysu axiomatických systémů. Sice, že v různých světech vyhovujících týmž axiomům platí současně všechna tvrzení z axiomů odvoditelná. Vyhledávání axiomatik, kterým by vyhovovaly mnohé zajímavé struktury je ve značné míře předmětem algebry a tento přístup k axiomatice se nazývá moderní. Jako příklad uveďme teorii grup, kdy celá čísla s operací sčítání, stejně jako čtvercové regulární matice s operací násobení tvoří grupu, rozhodně však nelze očekávat, že by v těchto dvou matematických světech platilo totéž.

Uveďme jako příklad systémy axiomů pro výrokový počet, predikátový počet a teorii grup.

Jeden systém axiomů pro výrokový počet je následovný: Všechny formule následujících tvarů jsou axiomy.

1) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$

2)$(\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi))$

3)$(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)$

Dedukčním pravidlem je pravidlo odloučení (z φ a $\varphi\to\psi$ odvoď ψ).

To, že formule systému B jsou odvoditelné z formulí systému *A* pouze za pomoci pravidla odloučení a logických axiomů je označováno znakem A|-B. Všechny základní technické věty (věta o dedukci, spor, rozbor případů, ...) je možno prověřit i v tomto pojetí. Přitom jsou ostatní logické spojky chápány jako zkratky za vhodné formule vytvořené z $\to$ a $\neg$ (např. $\varphi\vee\psi$ je zkratka za $\neg\varphi\to\psi$).

Jeden systém axiomů pro predikátový počet je následující.

1) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$, $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi))$, $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\varphi)$.

2) $(\forall x)(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to(\forall x)\psi)$ pokud φ neobsahuje x volně, $(\forall x)\varphi\to\varphi(x/\tau)$ pokud τ je substituovatelný.

Pravidla dedukce jsou φ, $\varphi\to\psi$|-ψ, φ|-$(\forall x)\varphi$.

Ostatní spojky $\&$, $\vee$, $\equiv$ a kvantifikátor $(\exists x)$ jsou chápány jako vhodné zkratky.

Jako třetí předložme jeden z axiomatických popisů teorie grup. Formule teorie grup jsou vytvořeny obecnými pravidly tvorby formulí predikátového počtu z jednoho binárního funkčního symbolu $\bullet$ (násobení v grupě) a jednoho binárního relačního symbolu = (rovnost v grupě).

Axiomy jsou jednak všechny axiomy predikátového počtu vztažené k formulím teorie grup.

Dále obecné axiomy rovnosti vztažené k symbolům teorie grup, t.j.

1) $x=x$ (axiom identity)

2) $(x_1=x_2\&y_1=y_2) \to (x_1=y_1\to x_2=y_2)$ (substitutivita pro rovnost)

3) $(x_1=x_2\&y_1=y_2) \to (x_1\bullet y_1=x_2\bullet y_2)$ (substitutivita pro násobení).

Nakonec vlastní axiomy charakterizující teorii grup, t.j.

1) $(x_1\bullet x_2)\bullet x_3 = x_1\bullet(x_2\bullet x_3)$ (asociativita)

2) $(\exists x)(\forall y)(x\bullet y = y)$ (levý neutrální prvek)

3) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)((y\bullet x)\bullet z = z)$ (levý inverzní prvek).

Dedukční pravidla jsou obecná dedukční pravidla predikátového počtu vztažená k formulím teorie grup.

Jsou však i jiné axiomatické popisy uvedených tří situací a dokázat jejich ekvivalenci nemusí být vždy snadné. Byl to m.j. i tento důvod, proč jsme volili přístup založený na popisu pravdivosti, který je jediný.

Při axiomatickém způsobu práce vznikají tři základní otázky:

1) Otázka bezespornosti axiomatického systému, t.j. zda nelze v systému dokázat sporné tvrzení a tudíž zcela libovolné tvrzení.

2) Otázka nezávislosti axiomů, t.j. zda některý z axiomů není dokazatelný z jiných a zda tedy není nadbytečné jej uvádět (tato otázka je zvláště důležitá pro moderní axiomatické systémy).

3) Otázka úplnosti systému axiomů, t.j. otázka, zda každé smysluplné tvrzení je axiomatikou rozhodnuto, t.j. zda je dokazatelné toto tvrzení, nebo jeho negace.

Zatímco druhou otázku se podařilo u mnoha zajímavých teorií vyřešit, je řešení první a třetí otázky značně obtížné a K. Gödel dokonce dokázal, že každá "rozumná" teorie popisující přirozená čísla má nerozhodnutelnou větu a konečnými prostředky nelze dokázat její bezespornost.

Ve všech třech námi uvedených teoriích jsou odpovědi poměrně snadné. Všechny tři teorie jsou absolutně bezesporné, neúplné a pro každou z nich platí, že její systém axiomů je nezávislý.