Jaké vlastnosti mají znalosti

(v sémantice možných světů)

Jeden ze způsobů jak charakterizovat naši interpretaci znalostí je popsat formule, které jsou vždy pravdivé.

Je-li dána struktura

$$M = (S, \pi, K_1, \dots, K_n)$$

(i) říkáme, že *formule A je pravdivá (validní) v M* a píšeme $M \models A$, jestliže $(M, s) \models A$ v každém stavu s.
(ii) říkáme, že *formule A je splnitelná v M*, jestliže $(M, s) \models A$ v nějakém stavu s.
(iii) říkáme, že *formule A je validní* a píšeme $\models A$, je-li pravdivá (validní) ve všech strukturách.
(iv) říkáme, že *formule A je splnitelná*, je-li splnitelná v nějaké struktuře.

Platí

formule A je validní (validní v M) právě když formule $\neg A$ není splnitelná (není splnitelná v M).

Připomeňme, že stále předpokládáme, že relace K_i jsou ekvivalence.

První vlastnost, kterou požaduje naše pojetí znalostí, je že agent zná všechny logické důsledky svých znalostí.

Zná-li agent formuli A a také ví, že A implikuje B, potom obě formule A a $A \to B$ jsou pravdivé ve všech světech, které agent považuje za možné,

tedy také B musí být pravdivé ve všech světech, které agent považuje za možné, takže musí znát i B.

Odtud dostáváme

$$\models (K_i A \wedge K_i (A \to B)) \to K_i B$$

Tomuto axiomu se říká axiom distribuce nebo také Kripkův axiom, protože dovoluje distribuovat operátor K_i přes implikaci.

Druhá vlastnost našeho pojetí znalosti zaručuje, že máme dostatečně silné agenty a pramení z toho, že agent zná všechny validní formule v dané struktuře.

Je-li A pravdivá ve všech stavech (tj. možných světech) struktury M, pak je pravdivá ve všech světech, které agent v daném světě považuje za možné.

Tak získáme *Pravidlo generalizace znalostí*.

Pro všechny struktury M

$$je-li \quad M \models A \quad potom \quad M \models K_i A$$

Odůvodnění.

$$\frac{\models A}{\models K_i A}$$

Nechť M je libovolná Kripkeho struktura a $M \models A$. To znamená, že v každém možném světě s struktury M platí $(M, s) = A$. Zvolíme-li pevně (ale libovolně) nějaký stav s, pak pro všechny stavy $t, (s,t) \in K_i$ platí $(M,t) \models A$, odkud dostáváme $(M,s) \models K_i A$.

Protože s byl libovolný stav ve struktuře M, také platí

$$M \models K_i A$$

a protože M byla libovolná Kripkeho struktura, dostáváme

$$\models K_i A$$

Tento axiom je něco jiného než implikace

$$A \rightarrow K_i A$$

která tvrdí „je-li A pravdivá, potom agent i to ví“. Agent nemusí vědět všechny věci, které jsou pravdivé.

{Například při hře zablácených dětí může mít jedno z nich zablácené čelo, ale nemusí to vědět.}

Agenti znají všechny validní formule, můžeme říci formule, které jsou *nutně* pravdivé.

Na rozdíl od formulí, které jsou (řízením osudu) pravdivé v nějakém možném světě.

Ačkoliv agent nemusí znát všechna fakta, která jsou pravdivá, když ví nějaký fakt, pak je pravdivý:

$$\models K_i A \rightarrow A$$

Tato vlastnost se obvykle nazývá *Axiom znalostí* nebo *Axiom pravdy*.

Odůvodnění axiomu: svět, ve kterém se agent nachází je vždy takový, který pokládá za možný. Platí-li

$$K_i A$$

v nějakém světě

$$(M, s),$$

pak A platí ve všech světech, které i považuje za možné, tedy i v (M, s).

{Filosofové tento axiom považují za hlavní odlišení znalosti a přesvědčení. Mohu mít nepravdivé přesvědčení, ale nemohu vědět něco, co není pravda.}

Poslední dvě vlastnosti se týkají přirozeného požadavku, aby agenti věděli o svých znalostech (pomocí introspekce).

Agenti vědí, co vědí a vědí, co nevědí.

$$\models K_i A \to K_i K_i A$$
$$\models \neg K_i A \to K_i \neg K_i A$$

První z těchto vlastností se jmenuje *Axiom pozitivní introspekce*, druhá *Axiom negativní introspekce*.

Věta.

Pro všechny struktury M pro n agentů s relacemi K_i, které jsou ekvivalencemi, a pro libovolné formule A , B platí

$(i)\ \ M \models (K_i A \wedge K_i (A \to B)) \to K_i B$

$(ii)\ \ je-li\ \ M \models A\ \ potom\ \ M \models K_i A$

$(iii)\ \ M \models K_i A \to A$

$(iv)\ \ M \models K_i A \to K_i K_i A$

$(v)\ \ M \models \neg K_i A \to K_i \neg K_i A$

Důkaz.

(i) **Distribuční axiom.** Je-li $(M,s) \models K_i A \wedge K_i (A \to B)$ potom pro všechny stavy $t, (s,t) \in K_i$,

$$(M,t) \models A \quad a \quad (M,t) \models A \to B$$

Z definice $\models$ potom $(M,t) \models B$ pro všechna taková t proto

$$(M,s) \models K_i B$$

(ii) **Pravidlo generalizace znalostí**

Je-li $M \models A$ potom $(M,t) \models A$ pro všechny stavy t v M. Speciálně pro pevně zvolený stav s v M a pro všechna t, $(s,t) \in K_i$, platí $(M,t) \models A$. Tedy pro všechny stavy s v M dostáváme $(M,s) \models K_i A$ To znamená

$$M \models K_i A$$

(iii) **Axiom znalostí**

Je-li $(M,s) \models K_i A$ potom pro všechna $t,(s,t) \in K_i$ platí $(M,t) \models A$. Protože K_i je reflexivní, je $(s,s) \in K_i$ odkud

$$(M,s) \models A$$

(iv) **Axiom pozitivní introspekce**

Předpokládejme, že

$$(M,s) \models K_i A$$

Uvažujme nějaké t, takové, že $(s,t) \in K_i$, a nějaké u, takové, že $(t,u) \in K_i$. Protože K_i je tranzitivní, platí $(s,u) \in K_i$. Protože $(M,s) \models K_i A$ dostáváme $(M,u) \models A$ tedy také $(M,t) \models K_i A$. Proto

$$(M,s) \models K_i K_i A$$

(v) **Axiom negativní introspekce**

Předpokládejme

$$(M,s) \models \neg K_i A$$

potom pro nějaké u, $(s,u) \in K_i$, musí platit $(M,u) \models \neg A$. Nechť t je takové, že $(s,t) \in K_i$. Protože K_i je symetrická, také $(t,s) \in K_i$ a protože je také tranzitivní, musí platit $(t,u) \in K_i$. Odtud dostáváme $(M,t) \models \neg K_i A$. To platí pro všechna t, $(s,t) \in K_i$, takže dostáváme

$$(M,s) \models K_i \neg K_i A$$

V Kripkeho strukturách jsme ověřili, že validní jsou

- **Distribuční axiom**
- **Pravidlo generalizace znalostí**
- **Axiom znalostí (Axiom pravdy)**
- **Axiom pozitivní introspekce**
- **Axiom negativní introspekce**

První axiom a pravidlo jsme ověřili bez jakýchkoli předpokladů o relacích K_i, validnost Axiomu znalostí plyne z reflexivity, validnost Axiomu pozitivní introspekce plyne z tranzitivity a validnost Axiomu negativní introspekce plyne ze symetrie a tranzitivity relací K_i.

$$\boxed{\boldsymbol{E_G} \quad \boldsymbol{C_G} \quad \boldsymbol{D_G}}$$

G je podmnožinou {1, 2, . . . , n}, $E_G A$ je pravdivé, právě když každý agent z G ví A. Tedy

$$\models E_G A \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i \in G} K_i A$$

Intuitivně, všeobecná znalost je to „co ví každý“, proto nepřekvapí, že všeobecná znalost má všechny vlastnosti znalostí podobné Distribučnímu axiomu, Axiomu znalostí, Axiomům pozitivní a negativní introspekce. (Cvičení)

Pro všeobecnou znalost mezi skupinami agentů platí

$$Je-li \quad G' \subseteq G \quad potom \quad C_G A \rightarrow C_{G'} A$$

Cvičení.

$(i) \quad (C_G A \wedge C_G (A \rightarrow B)) \rightarrow C_G B$

$(ii) \quad C_G A \rightarrow A$

$(iii) \quad C_G A \rightarrow C_G C_G A$

$(iv) \quad \neg C_G A \rightarrow C_G \neg C_G A$

Předpoklady o relacích K_i jsou stejné, jako při odvození odpovídajících axiomů.

Axiom o pevném bodu.

Nechť p je výrok „alespoň jeden z vás má zablácené čelo“.

Připomeňme, že ve hře zablácených dětí, se z p stala všeobecná znalost v okamžiku, kdy otec řekl p a všechny děti věděly dvě věci: že platí p a že jsou v takové situaci.

Axiom.

$$\models C_G A \leftrightarrow E_G (A \wedge C_G A)$$

{ $C_G A$ je pevným bodem funkce $f(x) = E_G (A \wedge x)$ }

Následující odvozovací pravidlo dává způsob, jak ukázat, že v nějaké struktuře platí společná znalost.

Indukční pravidlo

Pro všechny struktury M platí

je-li $M \models A \rightarrow E_G (B \wedge A)$, potom $M \models A \rightarrow C_G A$

Idea. Předpoklad indukčního pravidla dává možnost indukcí podle k dokázat, že formule

$$A \rightarrow E^k (B \wedge A) \quad \text{je validní pro každé } k.$$

V následující větě ukážeme,že *Indukční pravidlo* platí i pro operátory

$$E_G \text{ a } C_G.$$

Následující tvrzení dává sémantické odůvodnění charakteristiky operátoru E_G, Axiomu o pevném bodu a Indukčního pravidla.

Věta - shrnutí

Pro všechny struktury M, všechny neprázdné podmnožiny G množiny {1, 2, . . . , n} a libovolné formule *A, B* platí

$(i) \quad M \models E_G A \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i \in G} K_i A$

$(ii) \quad M \models C_G A \leftrightarrow E_G (A \wedge C_G A)$

$(iii) \; je-li \;\; M \models A \rightarrow E_G (B \wedge A), \;\; potom \;\; M \models A \rightarrow C_G B$

Důkaz. (nepředpokládá, že relace K jsou ekvivalence)

(i) přímo plyne ze sémantiky E_G .

Připomeňme

$$(M,s) \models C_G A \quad \textit{právě když} \quad (M,t) \models A$$

pro všechny stavy t, které jsou G-dosažitelné z s.

$(ii) \rightarrow$ Předpokládejme

$$(M,s) \models C_G A$$

potom

$$(M,t) \models A$$

pro všechny stavy t, G-dosažitelné z s .

Rozdělme cestu na dvě části, nechť u je G-dosažitelné z s v jednom kroku a t je G-dosažitelné z u .

Potom $(M,u) \models A \quad a \quad (M,t) \models A$

takže $(M,u) \models A \wedge C_G A$

pro všechny stavy u , G-dosažitelné z s v jednom kroku.

Odtud $(M,s) \models E_G(A \wedge C_G A)$ podle (i).

$(ii) \leftarrow$ Předpokládejme

$$(M,s) \models E_G(A \wedge C_G A) \tag{1}$$

Nechť t je G-dosažitelné z s a s' je první uzel na G-cestě z s do t . Z (1) plyne

$$(M,s') \models A \wedge C_G A \tag{2}$$

Uvažujeme dva případy s' je t nebo t je G-dosažitelné z s'.

V prvním případě je A pravdivé v t , protože t je s' a v s' A platí. Ve druhém případě je A pravdivé v t , protože t je G-dosažitelné z s' a z (2) plyne

$$(M,s') \models C_G A.$$

Protože A je pravdivé v každém stavu t , G-dosažitelném z s , dostáváme $(M,s) \models C_G A.$

(iii) předpokládejme

$$M \models A \rightarrow E_G(B \wedge A) \quad a \quad (M,s) \models A \tag{3}$$

indukcí podle k ukážeme, že pro všechny stavy t , dosažitelné z s v k krocích platí

$$(M,t) \models B \wedge A$$

Předpokládejme, že t je G-dosažitelné z s v jednom kroku. Z (3) potom odvodíme

$$(M,s) \models E_G(B \wedge A) \quad \text{odkud} \quad (M,t) \models B \wedge A$$

Je-li

$$k = k' + 1$$

nechť t' je dosažitelný z s v k' krocích a t v jednom kroku z t'.

Z indukční hypotézy máme

$$(M, t') \models B \wedge A$$

a stejným argumentem jako pro $k = 1$ dostaneme

$$(M, t) \models B \wedge A$$

Dokázali jsme

$$(M, t) \models B$$

pro každý stav t, G-dosažitelný z s. To znamená

$$(M, s) \models C_G B$$

Ze sémantiky nakonec odvodíme

$$(M, s) \models A \rightarrow C_G B$$

Tím je důkaz dokončen.

Distributivní znalosti

charakterizují znalosti, které odpovídají tomu, když „všichni agenti daji hlavy dohromady“. Proto splňují stejné vlastnosti jako znalosti. Navíc upozorníme na dvě drobnosti.

$$\models D_{\{i\}} A \leftrightarrow K_i A$$

pro jednočlennou skupinu se distribuované znalosti shodují s tím, co agent ví.

Naopak, čím je skupina větší, tím větší jsou její distribuované znalosti.

$$Je-li \quad G \subseteq G' \ potom \ \models D_G A \rightarrow D_{G'} A$$

Přístup založený na událostech

V dosavadním podání jsou znalosti vyjádřeny syntakticky, pomocí modálních operátorů na formulích. Mluvíme o logickém přístupu.

V matematické ekonomii a teorii her je rozšířen jiný přístup, který terminologicky připomíná teorii pravděpodobnosti, (ale jinak s ní nemá nic společného) který nazveme přístup založený na událostech.

Místo Kripkeho struktur používá tzv. *Aumannovy struktury*, které pracují s *událostmi*, což jsou množiny možných světů.

Motivace.

Máme množinu stavů S a událost e je nějaká její podmnožina.
Například událost „v Humpolci prší“ odpovídá množině všech stavů, kdy v Humpolci prší.

Říkáme, že *událost e platí ve stavu s*, jestliže $s \in e$.

To znamená, že je-li e_H událost, kdy v Humpolci prší, potom e_H platí ve stavu s, právě když s je jeden ze stavů, kdy v Humpolci prší.

Konjunkce (souběh) událostí je dán jejich průnikem.

Srovnání

- Aumannovy i Kripkeho struktury mají množinu stavů S.
- Aumannovy struktury nemají
  - množinu prvotních formulí Φ
  - ohodnocení π prvotních formulí
  - relace K
  - množinu formulí a jejich sémantiku
- Aumannovy struktury mají
  - pro každého agenta i rozklad R_i množiny S
  - prvky rozkladu se nazývaji *informační množiny* nebo krátce *buňky*

Rozklad R množiny S je množina

$$R = \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$$

taková, že

- *množiny S_i jsou po dvou disjunktní,*
  tedy $S_i \cap S_j = 0$ pro $1 \leq i < j \leq n$.
- *sjednocení množin S_i je množina S*

$$\bigcup_{i=1}^{r} S_i = S$$

Aumannova struktura (pro n agentů) je $(n+1)$-tice

$$\mathsf{A} = (S, R_1, \ldots, R_n)$$

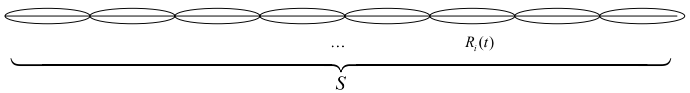
kde

- S je množina stavů světa
- R_i je rozklad pro agenta i, $1 \leq i \leq n$

budeme značit $R_i(s)$ buňku rozkladu R_i, ve které je prvkem stav s.

Protože každé i je R_i rozklad S, pro libovolná $s, t \in S$ platí

$$R_i(s) = R_i(t) \quad \text{nebo} \quad R_i(s) \cap R_i(t) = \emptyset$$



Rozklad R_i množiny stavů S na informační množiny agenta i.

Intuitivně, jsou-li dva stavy s, t ve stejné informační množině agenta i, pak agent i ve stavu s považuje stav t za možný.

Jak jsme již řekli, Aumannova struktura nemá množinu prvotních formulí Φ ani ohodnocovací funkci π, která v každém stavu ohodnocuje prvotní formule.

V Aumannových strukturách se znalosti definují pomocí událostí.

Je-li dána Aumannova struktura

$$\mathsf{A} = (S, R_1, \ldots, R_n)$$

definujeme znalostní operátory K_i, pro agenty $i = 1, 2, \ldots, n$ pomocí událostí takto

$$\mathrm{K}_i(e) = \{s \in S \mid R_i(s) \subseteq e\}$$

Je to zobrazení, které podmnožinám množiny stavů S přiřazuje podmnožiny S.

$\mathrm{K}_i(e)$ se nazývá *událost, kdy agent i ví e.*

Z definice bezprostředně plyne, že $\mathrm{K}_i(e)$ je sjednocení všech informačních množin agenta i, které jsou podmnožinou události e.

Intuitivně, agent i ví e ve stavu s, jestliže e platí ve všech stavech, které agent považuje za možné ve stavu s, tedy ve všech stavech $\mathrm{R}_i(s)$.

Připomeňme, že událost e platí ve stavu t, jestliže $t \in e$.

Připomeňme, že právě definované zobrazení K_i je modální operátor na množině událostí, který je třeba odlišit od binárních relací K_i z Kripkeho struktur.

V definici jsme modální operátor odlišili stojatým typem písma. Nebude-li nebezpečí záměny, budeme operátor i relace značit kursivou.

Událost, kdy *každý ve skupině G ví e*, zachycuje operátor E_G který také množinám stavů přiřazuje množiny stavů.

$$E_G(e) = \bigcap_{i \in G} K_i(e)$$

Tento operátor lze iterovat

$$E_G^1(e) = E_G(e) \quad a \quad E_G^{k+1}(e) = E_G(E_G^k(e)) \qquad (4)$$

pro $k > 0$.

Potom můžeme definovat *všeobecnou znalost* $C_G(e)$ *události e ve skupině G*

$$C_G(e) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_G^k(e)$$

je to množina všech stavů, ve kterých platí všechny iterace (4).

Distribuovanou znalost události e mezi agenty ve skupině G označíme $D_G(e)$ a definujeme

$$D_G(e) = \{s \in S \mid (\bigcap_{i \in G} R_i(s)) \subseteq e\}$$

Intuitivně, událost e platí ve všech stavech, které zůstanou možné, kombinujeme-li znalosti dostupné jednotlivým agentům ve skupině.

Říkáme, že *rozklad R množiny S je jemnější než rozklad R' (a R' je hrubší než R),* jestliže $R(s) \subseteq R'(s)$ platí pro každé $s \in S$.

Průsek rozkladů R a R' označíme $R \bigcap R'$. Je to nejjemnější rozklad hrubší než R a R'.

Spojení rozkladů R a R' je nejhrubší rozklad jemnější než R a R'. Označíme ho $R \bigcup R'$.

{Je-li rozklad R jemnější než R' pak informační množiny určené rozkladem R dávají nejméně tolik informací jako informační množiny R'. }

Věta.

Nechť $\mathsf{A} = (S, R_1, \dots, R_n)$ je Aumannova struktura, $G \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ je skupina agentů a $e \subseteq S$.

Potom

$$(i) \quad s \in C_G(e) \quad \Leftrightarrow \quad (\bigcap_{i \in G} R_i)(s) \subseteq e$$

$$(ii) \quad s \in D_G(e) \quad \Leftrightarrow \quad (\bigcup_{i \in G} R_i)(s) \subseteq e$$

Důkaz - cvičení

Předchozí věta ukazuje, že

• průsek rozkladů agentů ve skupině charakterizuje jejich společnou znalost

• spojení rozkladů agentů ve skupině charakterizuje jejich distribuovanou znalost.

Mezi logickým přístupem (pomocí Kripkeho struktur) a přístupem založeným na událostech (pomocí Aumanových struktur) existuje uzká souvislost.

Je-li dána množina S, existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi rozklady množiny S a relacemi ekvivalence na množině S.

• Je-li R rozklad množiny S, odpovídající relace ekvivalence K je definována vztahem

$$(s,s') \in K \text{ právě když } R(s) = R(s')$$

• Naopak je-li K relace ekvivalence, odpovídající rozklad R je definován tak, že každou třídu ekvivalence vzhledem ke K vezmeme jako buňku rozkladu R.

Máme-li Kripkeho strukturu

$$M = (S, \pi, K_1, \ldots, K_n)$$

kde K_i jsou relace ekvivalence, definujeme odpovídající Aumannovu strukturu

$$\mathsf{A} = (S, R_1, \ldots, R_n)$$

tak, že každý rozklad R_i odpovídá relaci ekvivalence K_i.

Chceme ukázat, že M i A mají stejnou „sémantiku“. Sémantika M je definována pomocí formulí, je-li B formule, množinu

$$B^M = \{s \mid (M,s) \models B\}$$

nazveme *intenzí* formule B.

Sémantika odpovídající Aumannovy struktury A je definována pomocí událostí. Ukážeme, že pro každou formuli B lze definovat odpovídající událost evM(B). Postupujeme indukcí podle složitosti formule B.

$ev_M(p) = p^M$ pro každou výrokovou konstantu p

$$ev_M(\neg B) = S - ev_M(B)$$

$$ev_M(B \wedge C) = ev_M(B) \cap ev_M(C)$$

$$ev_M(K_i B) = \mathrm{K}_i(ev_M(B))$$

$$ev_M(C_G B) = \mathrm{C}_G(ev_M(B))$$

$$ev_M(D_G B) = \mathrm{D}_G(ev_M(B))$$

Intuitivně je $ev_M(B)$ událost, ve které B platí.

Následující tvrzení ukazuje, že tato intuice je správná, že formule B platí ve stavu s v Kripkeho struktuře M *právě když* $ev_M(B)$ platí ve stavu s v odpovídající Aumannově struktuře A.

Věta

Nechť M je Kripkeho struktura, kde každá relace K_i je ekvivalence a nechť A je odpovídající Aumannova struktura.

Potom pro každou formuli B platí $ev_M(B) = B^M$.

Ukázali jsme, že ke každé Kripkeho struktuře M s relacemi ekvivalence existuje Aumannova struktura A^{M} se stejnou množinou stavů a stejnou sémantikou.

Naopak, ke každé Aumannově struktuře A lze sestrojit Kripkeho strukturu $M^{A,\pi}$ se stejnou množinou stavů a stejnou sémantikou.

Zde π je ohodnocení množiny prvotních formulí, která se získá z jisté množiny událostí. π ohodnocuje tyto prvotní formule ve všech stavech.