Uvažování o znalostech (agentů)

Filozofové se snažili pochopit a analyzovat vlastnosti znalostí v případě jediného individua.

Ale jádrem každé analýzy

konverzace
obchodního vyjednávání
protokolu řízeného událostmi v distribuovaném prostředí

je interakce mezi (více) agenty

Naši agenti mohou být vyjednávači, komunikující roboti, vodiče, paměti nebo složité počítačové systémy

• Agent ve skupině musí brát v úvahu fakta, která jsou pravdivá v okolním světě,
• ale také znalosti ostatních agentů ve skupině.

Příklad

Dean neví, jestli Nixon ví, že Dean ví, že Nixon ví, že McCord se vloupal do O´Brienovy kanceláře ve Watergate.

Většina lidí se rychle ztrácí v takto zahnízděné skupně znalostí.

Příklad.

Běžně se setkáváme se situací, kdy každý ve skupině ví určitý fakt.

Každý řidič ví, že červená je „stůj“ a zelená „volno“, ale samotným tímto faktem se nemusí cítit bezpečněji, pokud neví, že každý zná toto pravidlo a dodržuje ho.

V některých aplikacích nestačí toto „dvoustupňové“ vědění.

V některých situacích je třeba uvažovat stav, *kdy současně každý ví nějaký fakt F , každý ví, že každý ví F , každý ví, že každý ví, že každý ví F atd.*

V tako vém případě říkáme, že skupina má společnou znalost *F*.

Společná znalost

- je často nutná k porozumění v diskusi
- je často podmínkou k dosažení dohody

Zablácené děti.

Výchozí stav n dětí si společně hraje, po určité době se k dětí zablátí na místě, které nemohou vidět, například na čele.

Otec jednoho z nich: „nejméně jeden z vás má bláto na čele“.

{to je fakt známý každému dítěti, je-li $k > 1$}

Otec se opakovaně ptá „ví někdo z vás zda má bláto na čele ?“

$k - 1$ krát všechny děti odpoví NE, v k-tém kole všechny zablácené děti odpoví ANO.

První pokus o důkaz indukcí podle k.

Označíme-li tvrzení „nejméně jeden z vás má bláto na čele“ písmenem p zdá se, že otec tímto tvrzením neposkytl žádnou informaci v případech $k > 1$.

Kdyby otec neřekl p , zablácené děti nebudou nikdy schopny usoudit, že mají bláto na čele. Indukcí podle q se dá dokázat, že bez ohledu na situaci t.j na počet zablácených dětí, všechny děti odpoví NE na prvních q otázek.

Analýza: dříve než otec řekne p každá ví p ($k > 1$), ale není vždy pravda, že každý ví, že každý ví p.

Je-li počet zablácených dětí $k = 2$, není těžké ukázat,že neplatí, že každý ví, že každý ví p .

Naopak, je-li $k = 3$, tvrzení že každý ví, že každý ví p , ale neplatí, že každý ví,že každý ví, že každý ví p. (3 krát)

Označme

$E^k p$ *tvrzení* $(\textit{každý ví, že})^k$ *platí* p

$C p$ *tvrzení, že* p *společná znalost*

Cvičení Je-li zabláceno právě k dětí, dříve než otec promluví, platí $E^{k-1} p$ ale neplatí $E^k p$.

Otcovo prohlášení mění stav znalostí dětí z $E^{k-1} p$ na $C p$.

Model znalostí

Kripkeho model možných světů.

Idea.
kromě skutečného stavu světa existuje jistý počet možných stavů - „možné světy“.

S informacemi, které agent má, nemusí být schopen říci, který z možných světů popisuje skutečný stav.

Definice říkáme, že *agent zná fakt* p , jestliže p je pravdivé ve všech stavech, které agent pokládá za možné (vzhledem k informacím, které má).

Příklad.

Agent1 se prochází ulicemi Ústí nad Labem, kde je slunný den, ale nemá informaci o počasí v Humpolci.

Tedy ve všech světech, které Agent1 pokládá za možné, je v Ústí nad Labem slunný den.

Na druhé straně, protože agent neví jaké počasí je v Humpolci, v některých z jeho možných světů v Humpolci prší a v jiných je v Humpolci slunný den.

Agent1 tedy ví, že v Ústí nad Labem je slunný den, ale neví, je-li slunný den také v Humpolci.

Intuitivně, čím méně světů agent považuje za možné, tím je menší jeho nejistota a tím více toho agent ví.

Jestliže Agent1 získá ze spolehlivého zdroje informaci, že v Humpolci je slunný den, pak již nemusí dále uvažovat jako možné ty světy, ve kterých v Humpolci prší (je zataženo, mlha a podobně).

Abychom mohli tyto myšlenky vyjádřit přesně, potřebujeme jazyk, který by dovolil vyjádřit pojmy týkající se znalostí jednoznačným způsobem.

Použijeme *jazyk výrokové modální logiky*.

Předpokládejme, že máme skupinu n agentů, které pojmenujeme $1, 2, \ldots, n,$ kteří chtějí uvažovat o světě, který se dá popsat neprázdnou množinou prvotních výroků Φ, které budeme označovat

. $p, p', q, q', \ldots$

Prvotní výroky vyjadřují základní fakta o světě, například „v Humpolci prší“, „Mařenka je zablácená“.

Abychom mohli vyjádřit tvrzení

„Karel ví , že prší v Humpolci“

rozšíříme jazyk o modální operátory

$$K_1, K_2, \ldots, K_n$$

každý pro jednoho agenta.

Výraz $K_i p$ čteme *„ agent i ví p“*.

K jazyku patří také základní výrokové spojky $\neg$ a $\wedge$
z nichž se dají ostatní spojky definovat.

Formule.

$p \in \Phi \quad \Rightarrow \quad p \in \textbf{\textit{Formule}}$

$A, B \in \textbf{\textit{Formule}} \quad \Rightarrow \quad \neg A, (A \wedge B) \in \textbf{\textit{Formule}}$

$A \in \textbf{\textit{Formule}} \ \& \ 1 \le i \le n \quad \Rightarrow \quad K_i A \in \textbf{\textit{Formule}}$

Standardní zkratky z výrokové logiky

$A \vee B \quad za \quad \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$A \rightarrow B \quad za \quad \neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B \quad za \quad ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$true \ za \ p \vee \neg p \qquad false \ za \ \neg true$

{ p je pevně zvolená prvotní formule }

Příklad.

a)

$$K_1 K_2 p \wedge \neg K_2 K_1 K_2 p$$

Agent1 ví, že agent2 ví p , ale agent2 neví, že agent1 ví, že agent2 ví p .

b) možnost chápeme jako duální ke znalosti.
Agent1 považuje A za možné, jestliže neví ¬A.

$$\neg K_1 \neg A$$

Uvažujme tvrzení

Dean neví zda Nixon ví, že Dean ví, že Nixon ví, že McCord se vloupal do kanceláře O´Briena ve Watergate.

Označíme-li Deana za agenta 1, Nixona za agenta 2 a p za výrok *„McCord se vloupal do kanceláře O´ Briena ve Watergate“*.

Pak uvedené tvrzení lze zapsat takto

$$\neg K_1 \neg (K_2 K_1 K_2 p) \wedge \neg K_1 \neg (\neg K_2 K_1 K_2 p)$$

Sémantika (naší) modální logiky.

Kripkeho sémantika možných světů.

Kripkeho struktura M pro n agentů nad množinou prvotních formulí Φ je $(n+2)$-tice

$$(S, \pi, K_1, K_2, \ldots, K_n)$$

kde S je množina možných světů nebo krátce stavů, π je interpretace stavů, která každému stavu s přiřazuje pravdivostní ohodnocení prvotních formulí z Φ, tedy

$$\pi(s) : \Phi \rightarrow \{true, false\}$$

a K_i jsou binární relace na S.

Na začátku našeho výkladu, budeme předpokládat, že tyto relace jsou ekvivalence. Potom

$$(s,t) \in K_i \quad \Leftrightarrow \quad (t,s) \in K_i$$

Znamená-li $(s,t) \in K_i$, že agent i ve stavu s považuje svět t za možný, pak ze symetrie a tranzitivity plyne, že agent i má v s i t stejnou informaci o světě (stejnou množinu možných světů).

Stavy s a t jsou pro něj nerozlišitelné, tento přístup se dá použít u řady aplikací.

Sémantika možných světů.

Budeme definovat pojem $(M, s) \models A$, který čteme „formule *A platí ve struktuře M a stavu s*“ nebo „ *A je splněna v (M, s)*“. Postupujeme indukcí podle struktury A .

(i) $(M,s) \models p$ *právě když* $\pi(s)(p) = true$ $\{p \in \Phi\}$

(ii) $(M,s) \models \neg A$ *právě když* $(M,s) \not\models A$

(iii) $(M,s) \models A \wedge B$ *právě když* $(M,s) \models A$ *a* $(M,s) \models B$

(iv) $(M,s) \models K_i A$ *právě když* $(M,t) \models A$

pro všechna $t, (s,t) \in K_i$

Kripkeho struktury lze zobrazit jako ohodnocené orientované grafy.

Uzly grafu jsou stavy $s \in S$. Uzly jsou ohodnoceny množinou prvotních formulí, které v s platí.

Orientované hrany ohodnocujeme množinami agentů, ohodnocení hrany z uzlu s do t obsahuje index i, jestliže $(s,t) \in K_i$.

Příklad.

Nechť $\Phi = \{p\}$ a $n = 2$, tedy náš jazyk má jednu prvotní formuli p a existují dva agenti.

Uvažujme Kripkeho strukturu

$$M = (S, \pi, K_1, K_2)$$

kde

(i) $S = \{s, t, u\}$

(ii) p je pravdivé ve stavech s a u, tedy

$$\pi(s)(p) = \pi(s)(u) = \textit{true} \quad \text{a} \quad \pi(s)(t) = \textit{false}$$

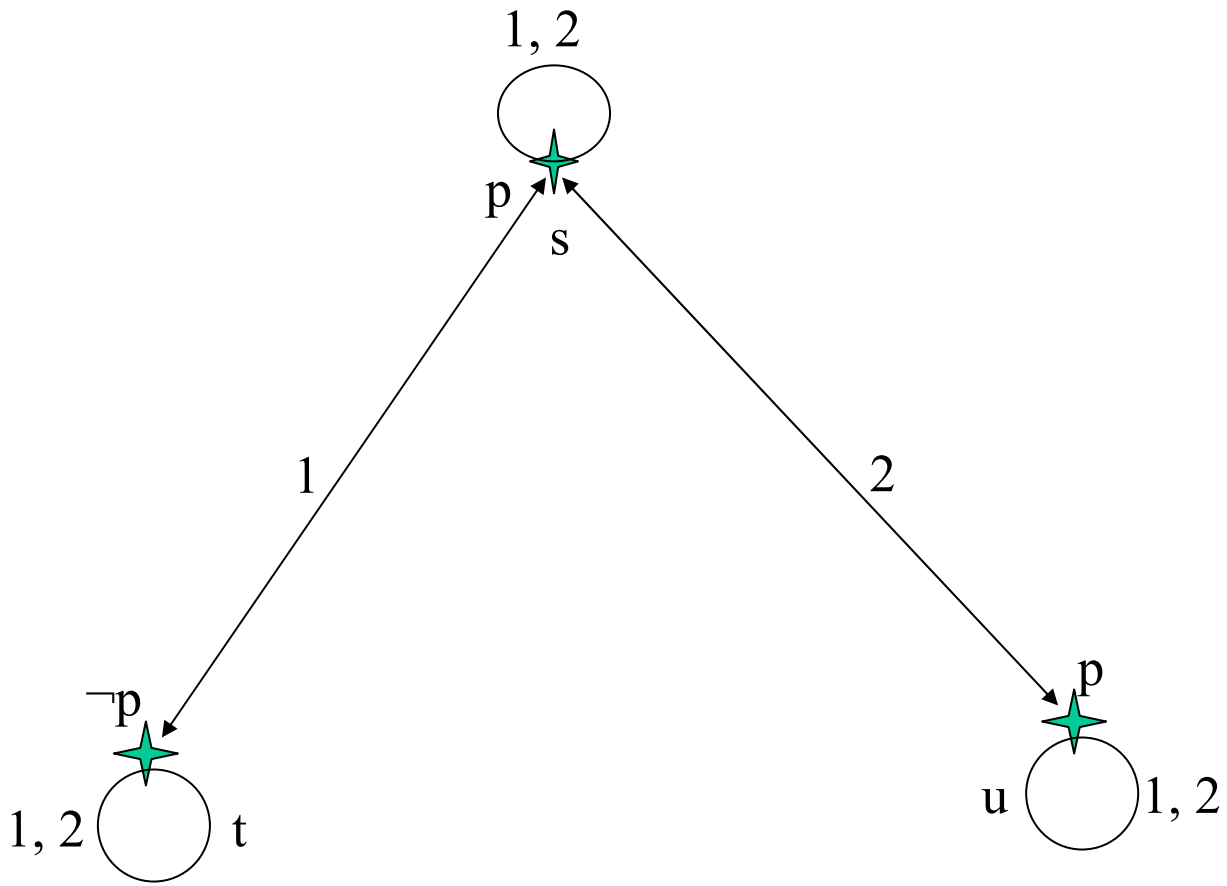
(iii) agent1 neumí rozlišit stav s od t, takže

$$K_1 = \{(s,s),(s,t),(t,s),(t,t),(u,u)\}$$

agent2 neumí rozlišit stav s od u, tedy

$$K_2 = \{(s,s),(s,u),(u,s),(t,t),(u,u)\}$$

Situaci znázorníme následujícím grafem, který popisuje relace K_i.


1, 2
p
s
1
2
¬p
1, 2
t
p
u
1, 2

Je-li p výrok „ v Ústí nad Labem je slunný den“, potom ve stavu s je v Ústí nad Labem slunný den, ale algent1 o tom neví, protože ve stavu s považuje za možné oba stavy s a t .

Agent1 je si vědom, že s a t jsou dva různé stavy, to co chceme říci je, že agent1 nemá dostatečné informace, aby rozlišil stavy s a t .

Agent2 ve stavu s , ví že v Ústí nad Labem je slunečno, protože ve stavu s považuje za možné jen stavy s a t a v obou p platí.

Agent2 ví i ve stavu t jaký je skutečný stav, že není slunečno.

Z toho plyne, že ve stavu s , agent1 ví, že agent2 ví v zda v Ústí nad Labem je slunný den nebo ne v obou stavech, které agent1 považuje za možné ve stavu s , jmenovitě je stavech s a t , agent2 zná skutečný stav věcí v obou z nich.

Tedy ačkoliv agent1 neví ve stavu s skutečnou situaci, ví že agent2 zná skutečnou situaci ve stavu s .

V kontrastu k tomu, i když agent2 ve stavu s ví, že v Ústí nad Labem je slunný den, neví , že agent1 nezná tento fakt {v jednom světě, který agent2 považuje za možný, jmenovitě u agent1 ví že v Ústí je slunečno, ale ve druhém možném světě agenta2, jmenovitě s agent1 tento fakt neví}.

Tato komplikovaná úvaha může být shrnuta do jediného sémantického tvrzení

$$(M, s) \models p \wedge \neg K_1 p \wedge K_2 p \wedge K_1(K_2 p \vee K_2 \neg p) \wedge \neg K_2 \neg K_1 p$$

Protože ve stavech s a u má naše jediná prvotní formule stejné ohodnocení, zdálo by se, že je možné jeden z nich vynechat. To ale není možné.

Stav není určen jen pravdivostním ohodnocením, ale také relacemi mezi možnými světy.

Kdyby agent1 považoval ve stavu s za možný stav u místo stavu t, věděl by jaká je situace ve stavu s.

Zatím jsme pracovali s *výrokovou modální logikou*.

Nemáme zde kvantifikaci prvního řádu univerzální ani existenční, proto nemůžeme popsat výroky: „Mařenka umí vyjmenovat (zná jménem) všechny krajské hejtmany“.

V *predikátové modální logice* bychom napsali

$$(\forall x)(Kraj(x) \rightarrow (\exists y)(K_{Mařenka} Krajský\_hejtman(x, y))$$

V dalším zůstaneme u výrokové modální logiky, která postačí pro naše účely a vyhneme se tak komplikovaným situacím, které přináší predikátová modální logika.

Všeobecné a distribuované znalosti

K vyjádření těchto pojmů přidáme do jazyka tři modální operátory

E_G {"*každý ve skupině G ví*"}

C_G {"*je to všeobecná znalost mezi agenty v G*"}

D_G {"*je to distribuovaná znalost mezi agenty v G*"}

pro každou neprázdnou podmnožinu G množiny [1, 2, . . . , n]. Je-li A formule, potom $E_G A, C_G A$ *a* $D_G A$ jsou také formule.

Příklad.

$K_3 \neg C_{[1,2]} p$ agent3 ví, že p není všeobecná znalost mezi agenty 1 a 2.

$D_G q \wedge \neg C_G q$ q je distribuovaná znalost, ale není to znalost všeobecná.

Není těžké definovat sémantiku těchto operátorů.
Nejprve definujme iteraci operátoru E_G.

$$E_G^0 A \equiv A \qquad E_G^{n+1} A \equiv E_G E_G^n A$$

Definujeme

$$(M,s) \models E_G A \quad \Leftrightarrow \quad (M,s) \models K_i A \text{ pro všechna } i \in G$$

$$(M,s) \models C_G A \quad \Leftrightarrow \quad (M,s) \models E_G^k A \text{ pro všechna } k$$

Oba pojmy mají zajímavou grafovou interpretaci, je-li G neprázdná podmnožina agentů, říkáme, že stav t je G-dosažitelný ze stavu s v k krocích, jestliže existuje posloupnost stavů

$$s \equiv s_0, s_1, \ldots, s_k \equiv t$$

taková, že pro každé $j, 0 \leq j < k$ existuje $i \in G$ takové, že $(s_j, s_{j+1}) \in K_i$. Říkáme, že *t je G-dosažitelné z s*, je-li G-dosažitelné po konečném počtu kroků.

Lemma.

$$(i)\ (M,s) \models E_G^k A \quad \Leftrightarrow \quad (M,t) \models A \quad \textit{pro každé } t,$$
$$G - \textit{dosažitelné v } k \textit{ krocích}$$

$$(ii)\ (M,s) \models C_G A \quad \Leftrightarrow \quad (M,t) \models A \quad \textit{pro každé } t,$$
$$G - \textit{dosažitelné z } s.$$

Důkaz.

(i) se dokáže indukcí podle k, (ii) plyne z (i).

Obě tvrzení se dokáží pro libovolné relace K, žádná jejich vlastnost se nepředpokládá.

Distribuované znalosti.

Vraťme se k našemu modelu z Ústí nad Labem.

Ve stavu s agent1 považuje za možné oba stavy s i t, ale ne stav u. Přitom agent2 považuje za možné stavy s a u, zatímco stav t ne.

Kdo by uměl využít znalosti obou agentů, by věděl, že možný je jenom stav s: agent1 má dost znalostí, aby mohl vyloučit stav u a agent2 by ze stejného důvodu vyloučil stav t.

Obecně, kombinujeme znalosti agentů ze skupiny G, abychom vyloučili všechny světy, které některý agent považuje za nemožné.

Tomu odpovídá průnik relací K. Definujeme

$$(M,s) \models D_G A \quad \Leftrightarrow \quad (M,t) \models A \quad \textit{pro každé } t, \; (s,t) \in \bigcap_{i \in G} K_i$$

Příklad.

Karetní hra

$G = \{ 1, 2 \}$ hrají dva hráči 1 a 2

$c = \{ A, B, C\}$ tři karty A, B, C

$\Phi = \{ 1A, 1B, 1C, 2A, 2B, 2C, 3A, 3B, 3C \}$

první hráč drží kartu A…

$S = \{ (A,B), (A,C), (B, A), (B, C), (C, A), (C, B) \}$

množina stavů: první hráč drží A, druhý B, ...

$\pi((A, B))(1A) = true$ $\pi((A, B))(1B) = false$ ...

$M = (S, \pi, K_1, K_2)$

Snadno se ověří

$$(M, (A, B)) \models C_G(1A \vee 1B \vee 1C)$$

$$(M, (A, B)) \models C_G(1B \rightarrow (2A \vee 2C))$$

$$(M, (A, B)) \models D_G(1A \wedge 2B)$$